COURS
CALCUL VECTORIEL ET BARYCENTRES

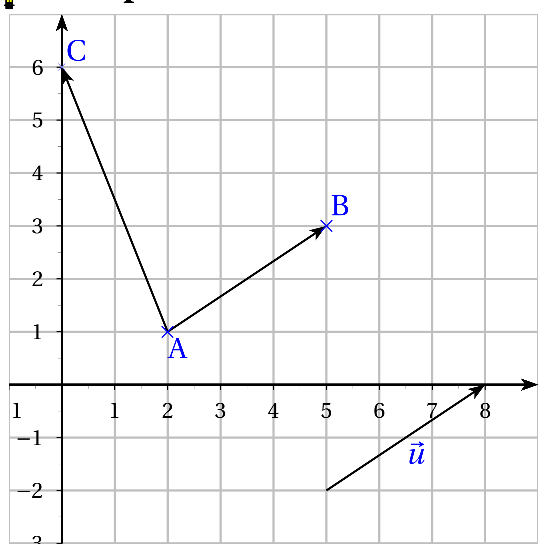
I) Rappels sur les vecteurs

I.1. Vocabulaire

Un vecteur est un objet géométrique représentant un trajet en ligne droite. Autrement dit, il est caractérisé par :

- Une **direction** (celle de la ligne droite)
- Un **sens** (celui où l'on parcourt la droite, ce qui revient à ne s'intéresser qu'à une demi-droite)
- Une **longueur** (celle du trajet, ce qui revient à ne s'intéresser qu'à un segment orienté)

Exemple :



1. Quels vecteurs sur la figure sont les mêmes ? Pourquoi ?
2. Tracer un vecteur opposé à $\overrightarrow{AC}$. Proposer deux notations.
3. Tracer un trajet correspondant à cumuler celui de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
Proposer une notation
4. Tracer un trajet correspondant à cumuler celui de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
Que constatez-vous ?
5. Placer M tel que

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Remarques :

- On les représente par des flèches et on les note en mettant une flèche de gauche à droite au dessus de leur nom.
$\overrightarrow{AB}$ est donc le trajet allant de A vers B en ligne droite.
$\overrightarrow{BA}$ est donc le trajet allant de B vers A en ligne droite.
- Le trajet consistant à rester sur place est symbolisé par un vecteur nul et est noté $\vec{0}$.
- L'**opposé** d'un vecteur est le vecteur décrivant le même trajet mais dans le sens oppposé. Ainsi $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- Les vecteurs n'ont pas de position fixe dans le plan ou l'espace (peu importe leur point de départ, on ne s'intéresse qu'au trajet qu'ils représentent).
- On peut les ajouter, les soustraire, les multiplier par un réel : concrètement, cela revient à cumuler les trajets ou les retrancher ou encore les allonger.

Théorème 1. (Relation de Chasles)

Soient A, B et C trois points du plan ou de l'espace. On a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr

I.2. Coordonnées

Théorème 2.

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

⇝ Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

⇝ Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

— Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

— Si de plus C a pour coordonnées $C(x_C, y_C, z_C)$ alors le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

Dans les deux cas, on fait la moyenne des coordonnées des points concernés.

Exercice 1 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $M(2;-4;1)$, $N(0;3;5)$ et $P(-1;2;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{NP}$ et $-3\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{PN}$

Exercice 2 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(-1;2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-4;0;-9)$ et $D(0;-2;1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?
3. Que peut-on en conclure sur les longueurs AB et CD ?
4. Donner un parallélogramme formé par ces quatre points (attention à l'ordre des points !!)

Exercice 3 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(-1;1;3)$, $B(2;1;0)$ et $C(4;-1;5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Les droites (AB) et (AC) sont-elles parallèles ?
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 4 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $M(2;0;3)$, $N(-1;3;4)$, $P(4;1;2)$ et $Q(-2;-1;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (MN) et (PQ) ?

Exercice 5 : On se place dans un repère de l'espace et on considère les points $A(2;-5;1)$, $B(-1;2;4)$, $C(3;4;-1)$ et $D(-2;3;2)$.
Soient I et J les milieux respectifs des segments [BD] et [AC], et G le centre de gravité du triangle ABC.
On définit K comme le point tel que $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

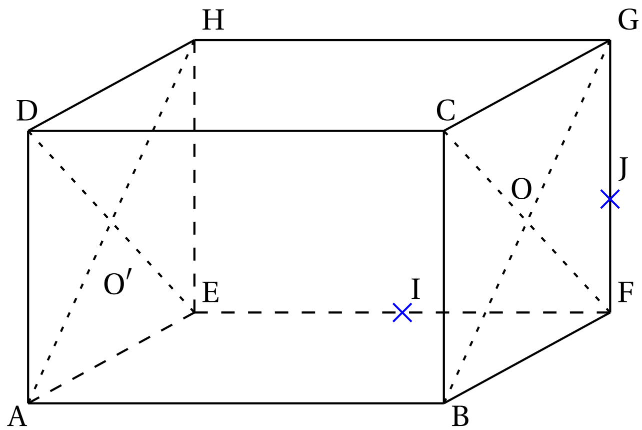
1. Calculer les coordonnées des points I, J, G et K.
2. Justifier que K appartient au segment [IJ].

I.3. Décomposition d'un vecteur dans une base

Travail de l'élève 1 : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre O, tel que $AB = 3$, $AD = 6$ et $AE = 4$.
On appelle I le centre du rectangle ABCD et J le milieu de l'arête [EH].

1. Faire un schéma de la situation
2. a. Placer le point K tel que :
$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HJ}$$
   b. Démontrer que
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$$
3. a. Déterminer les réels x et y tels que
$$\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$$
   On dit que l'on a **décomposé le vecteur** $\overrightarrow{BD}$ **en fonction des vecteurs** $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   b. En utilisant la question 2, décomposer le vecteur
   - $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HE}$
   - $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$

   c. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   d. Peut-on décomposer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$?
4. a. Placer les points M, N et P tels que
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$
   b. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$



Dans les exercices suivants, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessus.

Les points I, J sont les milieux des segments [EF] et [FG].
Les points O et O′ sont les centre respectifs des faces BCGF et ADHE.

Exercice 6 :

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
3. Que peut-on en déduire sur les droites (IJ) et (AC)?

Exercice 7 : Identifier les points R, S, T, U et V définis par :

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\quad;\quad \overrightarrow{HS}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}\quad;\quad \overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}\quad;\quad \overrightarrow{BU}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\quad;\quad \overrightarrow{CV}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

Exercice 8 :

1. Identifier les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\quad;\quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\quad;\quad \overrightarrow{HP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DA}$$

2. Construire K tel que $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$
3. Démontrer que C, K et I sont alignés.

Exercice 9 : Décomposer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AG}\,;\,\overrightarrow{AO}\,;\,\overrightarrow{BH}\,;\,\overrightarrow{CO'}\,;\,\overrightarrow{CO}\,;\,\overrightarrow{HI}\,;\,\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{IO'}$$

Exercice 10 : On se place désormais dans le repère $\left(E;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ et on sait que $\overrightarrow{EA}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{EF}=5\vec{j}$ et $\overrightarrow{EH}=2\vec{k}$.

1. Déterminer les coordonnées de chacun des points de la figure.
2. Décomposer les vecteurs suivants en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

$$\overrightarrow{AG}\,;\,\overrightarrow{FA}\,;\,\overrightarrow{GB}\,;\,\overrightarrow{OG}\,;\,\overrightarrow{ID}$$

Exercice(s) du livre : Delagrave : exos 3 à 6 p 132
Foucher : TP 1 p 270 (géogébra) + exos 1 à 6 p 273 (calculs de coordonnées)
Trouver des exos où on doit lire des coordonnées de points/vecteurs sur un pavé droit, etc

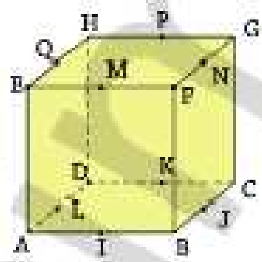
1 * Soit $A(3;3;5)$, $B(0;3;7)$, $C(2;1;5)$ et $D(4;2;4)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2 * Soit $A(0;1;-1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$ et $D(7;3;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer à l'aide des coordonnées que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Dans les **exercices 3 à 5**, on considère le cube ABCDEFGH, les points M, N, P, Q, I, J, K, L étant les milieux d'arêtes du cube.



3 * Écrire les sommes de vecteurs avec un seul vecteur.

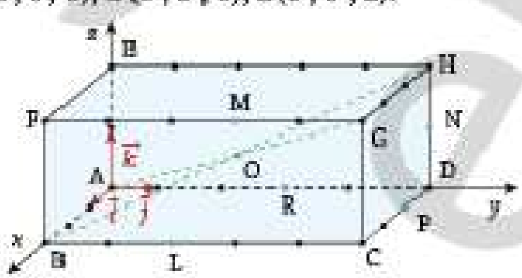
a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HN}$; c. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{PF}$;
d. $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{DH}$; e. $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
f. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; g. $\overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BL}$.

4 * Reproduire le cube ABCDEFGH et placer les points R, S et T tels que :

a. $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$; b. $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$;
c. $\overrightarrow{CT} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

5 * Décomposer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{HB}$.

6 * Dans un repère $(A\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH, de centre O, avec $B(3;0;0)$, $D(0;5;0)$, $E(0;0;2)$.



Décomposer chaque vecteur suivant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

a. $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{GB}$; b. $\overrightarrow{LR}$, $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{ME}$;
c. $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{PO}$.

II) Barycentres

Travail de l'élève 2 : Amener des peluches, du fil et des bâtons pour construire des mobiles plus ou moins complexes.
Intuiter l'importance du poids et les barycentres successifs.

II.1. Barycentres de deux points pondérés

Définition 1.

On considère deux points A et B du plan ou de l'espace, affectés de « poids » a et b (a et b sont des nombres réels avec $a+b \neq 0$)
On appelle **barycentre de deux points pondérés** (A, a) et (B, b) l'unique point G tel que

$$a\overrightarrow{\mathrm{GA}} + b\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{0}$$

Remarque : Le barycentre de deux points pondérés est en fait le point d'équilibre du segment.
Si $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, G appartient donc à la droite (AB). De plus, si $a = b$ alors G est le milieu du segment [AB]

Propriété 1.

Pour tout point M on a $a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} = (a+b)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$
En particulier si M = A, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Théorème 3.

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A}\ ;\ z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ y_\mathrm{B}\ ;\ z_\mathrm{B})$ deux points de l'espace.
Alors le barycentre G des points (A, a) et (B, b) (avec $(a+b \neq 0)$ a pour coordonnées :

$$\mathrm{G}\left(\frac{ax_\mathrm{A}+bx_\mathrm{B}}{a+b}\ ;\ \frac{ay_\mathrm{A}+by_\mathrm{B}}{a+b}\ ;\ \frac{az_\mathrm{A}+bz_\mathrm{B}}{a+b}\right)$$

Dans le plan, on a $\mathrm{G}(x_\mathrm{G}; y_\mathrm{G})$

Exercice(s) du livre : Delagrave : 7 à 10 p 132
Nathan : 11 + (14 ?) p 129

II.2. Barycentres de plusieurs points pondérés

Définition 2.

On peut définir de manière analogue le barycentre d'autant de points que l'on veut.
Par exemple, le barycentre de trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) (avec $a+b+c \neq 0$) est l'unique point G tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Remarque : Le barycentre de trois points pondérés est en fait le point d'équilibre du triangle.
Ainsi, si $a = b = c$ alors G est le centre de gravité du triangle ABC

Propriété 2.

Pour tout point M on a $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$
En particulier si $M = A$ on a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Théorème 4.

Si H est le barycentre de trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) (avec $a+b+c \neq 0$)
Et si G est le barycentre de deux points (A, a) et (B, b) (avec $a+b \neq 0$)
Alors H est le barycentre des points $(G, a+b)$, (C, c)

Théorème 5.

Soient $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C\ ;\ z_C)$ trois points de l'espace. Alors le barycentre G des points (A, a), (B, b) et (C, c) (avec $(a+b+c \neq 0)$ a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cz_C}{a+b+c}\ ;\ \frac{ay_A + by_B + cz_C}{a+b+c}\ ;\ \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}\right)$$

Dans le plan, on a $G(x_G; y_G)$

Exercice(s) du livre : Delagrave : 11 à 14 p 133 + TP1 p 130
Nathan : 12 + 13 + (15 ?) p 129