∾ Cours ∾
Résolution d'équations

Dans l'antiquité, les mathématiques étaient surtout utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs cultivables, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions ... Cependant, ils servaient aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figurait une ou plusieurs quantités inconnues à trouver. Les mathématiciens parlaient de "chose" et tentaient de résoudre leurs problèmes en suivant un discours logique mais parlé, et peu clair pour nous aujourd'hui. De plus, ils ne cherchaient qu'à résoudre leur problème particulier, sans essayer de généraliser une méthode, et devaient recommencer depuis le départ à chaque nouveau problème.

Ce n'est qu'au VIII^e siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie prit place peu à peu. Le point de départ fut de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprit l'intérêt d'une méthode générale de résolution d'équations plutôt que de faire du cas par cas, et c'est Al-Khawarizmi qui le premier s'intéressa à cela. C'est de lui que vient le mot "algorithme" qui désigne aujourd'hui une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique. Grâce à ce principe, il suffisait de trouver l'algorithme à suivre pour résoudre son problème et de savoir interpréter la (les) solutions trouvées.

Jusqu'au début du XIX^e siècle, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développèrent la notation symbolique et la conventionnèrent. Par exemple, au XVI^e siècle Viete sépara l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utiliser de nos jours. On catégorisa les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnus, afin de généraliser le plus possible leur résolution déquations.

A travers cette recherche, on fut contraint de s'intéresser à la nature des nombres, et même d'en introduire de nouveaux.

Au départ, les gens connaissaient les nombres entiers positifs et les quatre opérations. Ils se retrouvaient donc confrontés à des équations dont les paramètres étaient des entiers positifs mais des solutions qui ne l'étaient pas forcément … Observons cela plus en détails.

Table des matières

I) Généralités

I.1. Vocabulaire

Définition 1.

On appelle **équation** une égalité entre deux expressions algébriques. appelées "**membres**"

Exemple :

$3x+7=4x-9$ $\quad$ $5x+2y=7$ $\quad$ $3x^2+4x+1=0$ $\quad$ $(3x+1)(5-2x)=5$ sont des équations.

- ⇝ La première comporte une seule valeur *inconnue* x
- ⇝ La deuxième comporte deux *inconnues* x et y
- ⇝ La troisième comporte à nouveau une seule inconnue, mais cette dernière est élevée au carré. On parle donc d'*équation du second degré*.
- ⇝ La quatrième comporte une seule inconnue, et si on développe le membre de droite, on trouve $15x-6x^2+5-2x=5$. L'inconnue apparait donc au carré, il s'agit d'une équation du second degré.
  Les deux premières équations sont du *premier degré*.

Remarque : Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'aux équations à une inconnue.

Définition 2.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.
Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation.

Remarque : Ainsi, si l'on remplace l'inconnue dans le membre de droite de l'équation de départ par l'une des solutions trouvées et que l'on compte, puis que l'on fait pareil avec le membre de gauche, on doit trouver les mêmes valeurs. Ceci permet de vérifier nos réponses.

I.2. Règles permises

Pour résoudre une équation d'inconnue x, on cherche à trouver des équations équivalentes à celle-ci (c'est-à-dire avec exactement les mêmes solutions), de plus en plus simples, jusqu'à en obtenir une ou plusieurs du type "$x = ...$"

Remarque : Visualisons une équation comme une balance en équilibre :

- ⇝ Chacun des membres représente un plateau de la balance
- ⇝ Le signe "=" représente la position d'équilibre

Pour trouver des équations équivalentes à celle de départ, l'idée est alors de faire des modifications dans chacun des plateaux, tout en conservant l'équilibre de la balance.

Modifications permises

Sur une balance	Sur une équation	
On peut **ajouter** ou **enlever** un même poids aux deux plateaux	On peut **ajouter** ou **enlever** un même nombre aux deux membres d'une équation	$\begin{aligned} & 2x+5 &= \ & 8+x \\ \overset{-5}{\iff} \ & 2x+5-5 &= \ & 8+x-5 \\ \iff \ & 2x &= \ & 3+x \\ \overset{-x}{\iff} \ & 2x-x &= \ & 3+x-x \\ \iff \ & x &= \ & 3 \end{aligned}$ *Vérification* : $2\times 3+5=11$ et $8+3=11$ 3 est donc la seule solution de l'équation.
On peut **multiplier** ou **diviser** les poids des deux plateaux par un même nombre non nul	On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une équation par un même nombre non nul	$\begin{aligned} & 2x &= \ & 10 \\ \overset{\div 2}{\iff} \ & \dfrac{2x}{2} &= \ & \dfrac{10}{2} \\ \iff \ & x &= \ & 5 \end{aligned}$ *Vérification* : $2\times 5=10$ 5 est donc une solution de l'équation.

II) Equations du premier degré

Définition 3.

Une équation du premier degré est une égalité du type $ax+b=0$ (ou pouvant s'y ramener), où a et b sont deux nombres connus et $a \neq 0$.

Exemple :

$3x+4=0$, ou encore $3x+4=x-8$ ...

Méthode

Dans des résolutions d'équations du premier degré, on cherche à combiner les deux règles vues précédemment afin d'isoler l'inconnue. En général :

- On enlève les parenthèses *On compte ce que l'on peut*
- On sépare les termes qui comportent une variable et les autres, grâce à la **première règle**

  On compte ce que l'on peut
- On isole l'inconnue, grâce à la **deuxième règle** *On compte ce que l'on peut*
- *On vérifie la solution trouvée*

Exemples :

$$\begin{aligned} 3x+4=-11 \quad &\overset{-4}{\iff} & 3x+4-4 &= -11-4 \\ &\iff & 3x &= -15 \\ &\overset{\div 3}{\iff} & \frac{3x}{3} &= \frac{-15}{3} \\ &\iff & x &= -5 \end{aligned}$$

Vérification : $3\times(-5)+4=-15+4=-11$

$$\begin{aligned} 1-(2x+3)=4(x+4) \quad &\iff & 1-2x-3 &= 4x+16 \\ &\iff & -2x-2 &= 4x+16 \\ &\overset{+2}{\iff} & -2x-2+2 &= 4x+16+2 \\ &\iff & -2x &= 4x+18 \\ &\overset{-4x}{\iff} & -2x-4x &= 4x+18-4x \\ &\iff & -6x &= 18 \\ &\overset{\div(-6)}{\iff} & \frac{-6x}{-6} &= \frac{18}{-6} \\ &\iff & x &= -3 \end{aligned}$$

Vérification :

$1-(2\times(-3)+3)=1-(-6+3)=1-(-3)=1+3=4$

$4(-3+4)=4\times 1=4$

Exercice du Cours : Résoudre les équations suivantes :

$x-4=10 \qquad -3x+6=5 \qquad 3x=4 \qquad \frac{x}{2}=5 \qquad 5-x=4 \qquad 2x=0 \qquad \frac{1}{4}x-2=-\frac{7}{3}$

$5-x=5 \qquad 5x+9=-2x \qquad 8-4x=72 \qquad 6x+40=121-3x \qquad 2x+8=3(x+2)$

III) Equation-produit nul

Définition 4.

Une **équation-produit nul** est une équation à une inconnue où l'un des membres est un produit et l'autre membre vaut 0.

Proposition 1.

- Dans un produit, si l'un des facteurs vaut 0, alors ce produit vaut 0
- Si un produit vaut 0, alors l'un de ses facteurs vaut 0

Ce qui se résume aussi ainsi : "Un produit est nul si et seulement l'un de ses facteurs est nul."

Méthode sur un exemple

$(4x+3)(5-x)=0$ est une équation-produit nul. On note $A=4x+3$ et $B=5-x$.
D'après la proposition ci-dessus, le produit AB vaut 0 si et seulement si $A=0$ ou $B=0$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
(4x+3)(5-x)=0 &\iff 4x+3=0 && \text{ou} \quad 5-x=0\\
&\iff 4x+3-3=0-3 && \text{ou} \quad 5-x-5=0-5\\
&\iff 4x=-3 && \text{ou} \quad -x=-5\\
&\iff \frac{4x}{4}=\frac{-3}{4} && \text{ou} \quad x=5\\
&\iff x=-\frac{3}{4} && \text{ou} \quad x=5
\end{aligned}$$

On vérifie chacune des solutions trouvées :

- Si $x=-\frac{3}{4}$ alors $4x+3=\left(4\times\frac{-3}{4}+3\right)=-3+3=0$ et donc

$$(4x+3)(5-x)=0\times(3-x)=0$$

- Si $x=5$ alors $5-x=5-5=0$ et donc

$$(4x+3)(5-x)=(4x+3)\times 0=0$$

Dans les deux cas, on a bien l'égalité voulue.

Exercice du Cours : Résoudre les équations-produit nul suivantes et vérifier les solutions obtenues

$(5x+1)(6x-7)=0$ $\quad 3x(5x+4)=0$ $\quad 3(x+7)(7-x)=0$ $\quad x(5-7x)=0$ $\quad (3-x)(6+4x)(5+x)=0$

IV) Equations du second degré

Définition 5.

Une **équation du second degré** est une égalité du type $ax^2+bx+c=0$ (ou pouvant s'y ramener), où a, b et c sont trois nombres connus et $a \neq 0$.

Les règles énoncées précédemment permettent d'établir le résultat suivant :

Méthode

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré, où a, b et c sont trois nombres connus.
On calcule $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ (éventuellement confondues), notées x_1 et x_2 qui sont :

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemples :

$3x^2+2x+1=0$
$\Delta = 2^2-4\times 3\times 1 = 4-12=-8<0$
L'équation n'admet pas de solution réelle.

$-3x^2+2x+1=0$
$\Delta = 2^2-4\times(-3)\times 1 = 4+12=16$
L'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{-2-4}{-6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$-3x^2-2x+1=0$
$\Delta = (-2)^2-4\times(-3)\times 1 = 4+12=16$
L'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{2-4}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{2+4}{-6} = -1$$

Exercice du Cours : Résoudre les équations suivantes et vérifier les solutions obtenues

$8x^2-3x+2=0$ $\qquad$ $8x^2-3x+2=5$ $\qquad$ $3x+1-5x^2=0$ $\qquad$ $x^2-3x+2=0$

$-8x^2+x=0$ $\qquad$ $-8x^2-5=0$ $\qquad$ $(2x^2+x-4)(5-7x)=0$ $\qquad$ $3x^2(-7x^2-4x+1)=0$