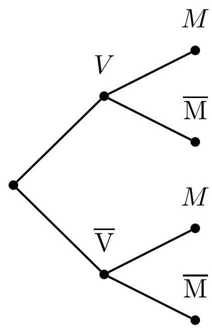
Correction du devoir Surveillé 3

Exercice 1. *Probabilités* (6 points)
Face à la menace d'une épidémie frappant les troupeaux de bovins, les services sanitaires décident d'organiser une vaccination de masse.
40 % des animaux ont été vaccinés.
Les experts considèrent que 30 % des animaux non vaccinées contracteront la maladie tandis que 1 % des animaux vaccins contracteront quand même la maladie.
On note V l'événement « l'animal a été vacciné » et M l'événement « l'animal a contracté la maladie ».
On note $\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{M}}$ les événements contraires respectifs de V et M.
Les probabilités seront, si nécessaire, arrondies au millième.

1.



On a $P(V) = 0,4$
$\mathrm{P_V(M)} = 0,01$.

2. (a) L'événement V $\cap$ M est l'événement « l'animal est vacciné et malade ». On a :

$$P(V \cap M) = P(V) \times \mathrm{P_V(M)} = 0,4 \times 0,01 = 0,004$$

(b) On cherche $P(\overline{V} \cap M)$, on sait que $P(\overline{V}) = 1 - 0,4 = 0,6$, par conséquent :

$$P(\overline{V} \cap M) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

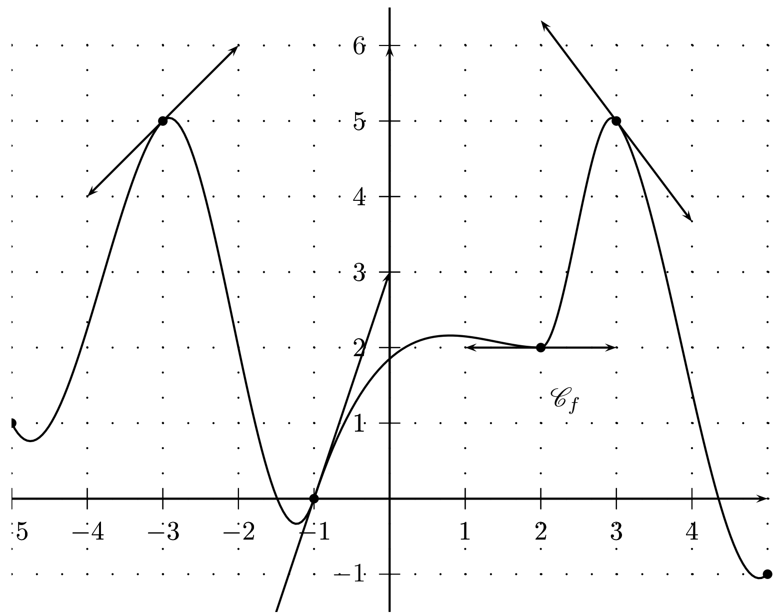
(c) On a donc $P(M) = P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M) = 0,004 + 0,18 = 0,22$

3. On cherche $P_M(V)$ et on sait que :

$$P_M(V) = \frac{P(M \cap V}{P(M)} = \frac{0,004}{0,18} = \frac{4}{180} = \frac{2}{90}$$

Exercice 2. *Lecture graphique* (2 points)
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
On a

$$f'(-3) = 1 \qquad f'(-1) = 3 \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(3) = -\frac{4}{3}$$



<u>Exercice</u> 3. *Etude de fonction* (6 points)

1. Calculons les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 8x + 2$, donc
   $$f'(x) = x - 8$$
   (b) $g(x) = 4x^5 + 6x^3 - 2x + 6$, donc
   $$g'(x) = 20x^3 + 18x^2 - 2$$
   (c) $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$, donc
   $$h'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$
   (d) $k(x) = \dfrac{3-2x}{2x+1}$, donc
   $$k'(x) = \frac{-2(2x+1) - 2(3-2x)}{(2x+1)^2} = \frac{-4x-2-6+4x}{(2x+1)^2} = -\frac{8}{(2x+1)^2}$$

2. Etudions le signe de $f'(x)$ et celui de $k'(x)$ $f'(x) \geq 0 \iff x - 8 \geq 0 \iff x \geq 8$
   $k'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$ pour tout $x \neq 1$
   On en déduit immédiatement les deux tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

et :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$-$	
$k(x)$		↘	‖	↘	

3. En observant les tableaux de variations précédents, on constate que f admet un minimum en $x = 8$ qui est 2.

Exercice 4. *Objectifs BAC* (7 points)
Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. Elle peut fabriquer jusqu'à 14 lots par jours et, lorsqu'elle fabrique et vend x lots, le coût de fabrication journalier correspondant est donné, en centaines d'euros, par :

$$C(x) = 0,2x^3 - 3,6x^2 + 21,6x - 30 \qquad \text{où} \qquad x \in [2; 14]$$

De plus, le prix de vente d'un lot dépend du nombre x de lots vendus et il est exprimé, en centaines d'euros, par

$$P(x) = 7,2 - 0,3x$$

1. $$R(x) = P(x) \times x = 7,2x - 0,3x^2$$
2. Le graphique, ci-dessous, décrit le montant de la recette journalière R et le coût de production C, en fonction du nombre de lots x fabriqués et vendus par jour.
   (a) Pour que l'entreprise réalise un bénéfice chaque jour on peut produire de 2 à 11 lots.
   (b) Pour 8 l'écart entre les courbes de C et de R semblent maximal, donc le bénéfice semble maximal pour 8 lots.
3. On souhaite déterminer le nombre exact de lots pour lequel le bénéfice est maximal.
   Pour tout x de l'intervalle $[2; 14]$, on pose :

$$f(x) = R(x) - C(x) = -0,2x^3 + 3,3x^2 - 14,4x + 30$$

   (a) On a :

$$f'(x) = -0,6x^2 + 6,6x - 14,4$$

   De plus

$$0,6(8-x)(x-3) = 0,6(8x - 24 - x^2 + 3x) = 0,6(-x^2 + 11x - 24) = -0,6x^2 + 6,6x - 14,4 = f'(x)$$

   (b) On obtient le tableau de signe suivant :

x	2		3		8		14
$8-x$			$+$		0	$-$	
$x-3$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(c)

x	2		3		8		14
$8-x$			$+$		0	$-$	
$x-3$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

(d) Pour que le bénéfice soit maximal il faut bien vendre 8 lots et le bénéfice maximal est alors $f(8)$ centaines d'euros.

$$f(8) = -0,2 \times 8^3 + 3,3 \times 64 - 14,4 \times 8 + 30 =$$