TUTORAT-SÉANCE 15

Objectifs :

1. Représentation paramétrique de droites
2. Intersection de plans, de droites et de plans, de trois plans, ect...
3. Distance d'un point à un plan.

I) Métropole Sept. 2010

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. (a) Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.
   (b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.
2. Soit $(\mathscr{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$.
   (b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathscr{Q})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{CI} = \sqrt{3}$.
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.
   (a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $\mathrm{CM}_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
   (b) Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Eléments de correction (Métropole septembre 2010)

---

1. (a) $\mathrm{C}(1\ ;\ 3\ ;\ 2) \in (\mathscr{P}) \iff 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 0 \iff 3 = 0$, faux. Le point C n'appartient pas au plan $(\mathscr{P})$.
   (b) Soit M un point de $(\mathscr{D})$.
   $\mathrm{M} \in (\mathscr{P}) \iff 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0 \iff -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$, vrai quel que soit t.
   Tout point de $(\mathscr{D})$ est un point de $(\mathscr{P})$, donc la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.
2. (a) Un vecteur normal au plan $(\mathscr{Q})$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$; d'après la représentation paramétrique les coordonnées d'un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ sont $(-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$.
   Une équation du plan $(\mathscr{Q})$ est donc :
   $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathscr{Q}) \iff -x + 2y - z + d = 0$.
   Or $\mathrm{C}(1\ ;\ 3\ ;\ 2) \in (\mathscr{Q}) \iff -1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3$.
   Conclusion : $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathscr{Q}) \iff -x + 2y - z - 3 = 0$.
   (b) Soit $\mathrm{M}(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$ un point de $(\mathscr{D})$.
   $\mathrm{M} \in (\mathscr{Q}) \iff -(-t+1) + 2 \times 2t - (-t+2) - 3 = 0 \iff t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1$.
   Donc le point commun I à $(\mathscr{Q})$ et à la droite $(\mathscr{D})$ a pour coordonnées $(-1+1\ ;\ 2 \times 1\ ;\ -1+2) = (0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
   (c) On a $\overrightarrow{\mathrm{CI}}\ (-1\ ;\ -1\ ;\ -1)$.
   Donc $\mathrm{CI}^2 = \overrightarrow{\mathrm{CI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CI}} = 1 + 1 + 1 = 3$.
   Conclusion $\mathrm{CI} = \sqrt{3}$.
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.
   (a) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{CM}_t}\ (-t+1-1\ ;\ 2t-3\ ;\ -t+2-2)$ soit $(-t\ ;\ 2t-3\ ;\ t)$.
   On a $\mathrm{CM}_t^2 = \overrightarrow{\mathrm{CM}_t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CM}_t} = (-t)^2 + (2t-3)^2 + t^2 = t^2 + 4t^2 + 9 - 12t + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
   (b) $\mathrm{CM}_t^2 = 6t^2 - 12t + 9 = 6\left(t^2 - 2t + \dfrac{9}{6}\right) = 6\left[(t^2 - 2t + 1) - 1 + \dfrac{3}{2}\right] = 6\left[(t-1)^2 + \dfrac{1}{2}\right]$.
   Le minimum de ce trinôme somme de deux carrés est obtenue lorsque le premier carré est nul soit pour $t = 1$ et la valeur minimale de trinôme est égale à $\mathrm{CM}_t^2 = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3 \Rightarrow \mathrm{CM}_t = \sqrt{3}$. CI est bien la valeur minimale.

II) QCM type

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :

   (a) l'ensemble vide (b) un plan (c) une sphère

2. On considère les points A(0 ; 1 ; −2) et B(2 ; 1 ; 0).
   Les coordonnées du barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) sont :

   (a) G(6 ; 4 ; -2) (b) G(1,5 ; 1 ; -0,5) (c) G(0,5 ; 1 ; 1,5)

3. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$; $y = 3t$; $z = -3$, $t \in \mathbb{R}$.
   On considère les points A(2 ; 3 ; −3), B(2 ; 0 ; −3) et C(0 ; 6 ; 0). On a :

   (a) d = (AB) (b) d = (BC) (c) $d \neq$ (AB) et $d \neq$ (BC) et $d \neq$ (CA)

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1+t, t \in \mathrm{R}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t' \\ y & = & 2-1,5t' \\ z & = & 3+t',\ t' \in \mathrm{R} \end{array}\right.$$

   admettent comme point commun :

   (a) I(3 ; 0 ; 2) (b) J(2 ; 1 ; 1) (c) K(0 ; 2 ; −3)

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+t,\ t \in \mathrm{R}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-2t' \\ y & = & 7-4t' \\ z & = & 2-t',\ t' \in \mathrm{R} \end{array}\right.$$

   sont :

   (a) parallèles (b) sécantes (c) non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t$; $y = 1+3t$; $z = 2+2t$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x-2y+5z-1 = 0$ sont :

   (a) orthogonaux (b) parallèles (c) ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

   (a) l'ensemble vide (b) une droite (c) un plan