TUTORAT-SÉANCE 13

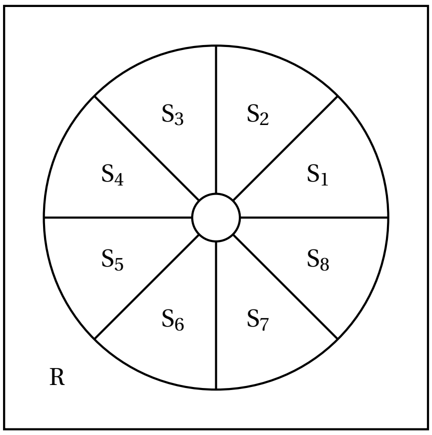
Objectifs :

1. Probabilités conditionnelles et Probabilité totale.
2. Loi binomiale.

Exercice 1.

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :
- un disque D de rayon 1 cm,
- 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire déimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,
- une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. (a) Déterminer la probabilité $p(\mathrm{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.
   (b) Déterminer la probabilité $p(\mathrm{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.
2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $p(\mathrm{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$, $p(\mathrm{S}_k) = 0{,}078\,5$.
   A cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.
   (a) Calculer la probabilité $p(\mathrm{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.
   (b) On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.
   (c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0,9$.

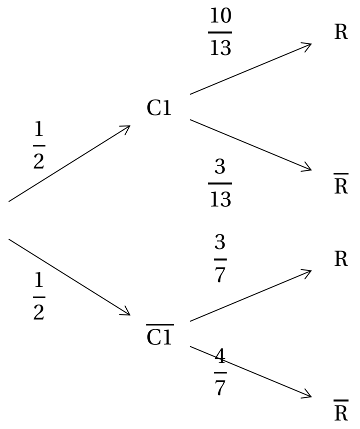
Exercice 2. *Pour les questions* 1 *et* 2*, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :
   C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
   C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
   R : « L'enfant prend une bille rouge »,
   V : « L'enfant prend une bille verte ».
   (a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement R.
   (c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
   (a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
   (b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

Eléments de correction (Métropole Juin 2005)

---

1. (a) Comme l'enfant tire simultanément les boules, il n' y a pas de première boule, ni de deuxième, etc., donc il y a un choix de trois boules parmi 13, c'est à dire qu'il y a $\binom{13}{3} = 286$ tirages au hasard possibles.
   La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, et de plus, pour obtenir :
   • X = 0, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boules vertes parmi les 3, donc :
   $$P(X=0) = \frac{1}{286}.$$
   • X = 1, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 1 boule rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de cette boule rouge il y a un tirage de 2 boules vertes parmi les 3, donc :
   $$P(X=1) = \frac{\binom{10}{1}\times\binom{3}{2}}{286} = \frac{30}{286}.$$
   • X = 2, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 2 boules rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de ces boules rouges il y a un tirage de 1 boules verte parmi les 3, donc :
   $$P(X=2) = \frac{\binom{10}{2}\times\binom{3}{1}}{286} = \frac{135}{286}.$$
   • X = 3, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boule rouge parmi 10, donc :
   $$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}}{286} = \frac{120}{286}.$$
   Remarquez bien que $\sum_{k=0}^{k=3} P(X=k) = 1$, ce qui permet de s'assurer que notre raisonnement est cohérent à défaut d'être bon.
   (b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{k=0}^{k=3} k \times P(X=k) = 2,307$.



2. (a)

   (b) D'après les formules des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R\cap C1) + P(R\cap C2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{10}{13}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7} \\ &= \frac{109}{182}\approx 0,598 \end{aligned}$$

   (c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique est : $P_R(C1) = \dfrac{P(C1\cap R)}{P(R)} = 0,642$

3. Comme l'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place, le jeu est repétée de manière indépendante.

   (a) La probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix est , en passant à l'événement contraire : 1 - P(aucune boule rouge). Or, compte tenu de l'indépendance, la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est :

$$P(\overline{R})\times P(\overline{R})\times P(\overline{R})\cdots P(\overline{R}) = \left(P(\overline{R})\right)^n = \left(1-\frac{109}{182}\right)^n = \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

   Donc, $p_n = 1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

   (b) Pour calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99.$, résolvons :

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0,99 \\ &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0,99 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leqslant 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{73}{182}\right)^n \leqslant \ln 0,01 \\ &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{73}{182}\right) \leqslant \ln 0,01 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 5,04 \end{aligned}$$

   Donc la valeur minimale est $n = 6$