# TUTORAT-SÉANCE 12

***Objectifs*** :

1. Probabilités conditionnelles et Probabilité totale.
2. Loi binomiale.

**Exercice 1.** On lance $n$ pièces de monnaie ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins une fois face (sur l'ensemble des $n$ lancers) ».

1. Décrire l'événement $\overline{\mathrm{A}}$ à l'aide d'une phrase.
2. Faire un arbre et calculer $p(\mathrm{A})$ dans le cas où $n = 3$.
3. Dans cette question, on suppose $n$ quelconque. Exprimer $p(\mathrm{A})$ en fonction de $n$.
4. Combien de pièces faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois « face » soit supérieure à $\frac{7}{8}$ ?

**Exercice 2.** (Métropole Juin 2009)

**I.** *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

*On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que* $p \leqslant n$ *alors* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n$ et pour tout nombre entier naturel $p$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

**II.** Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. (a) On note A l'événement « obtenir deux jetons blancs ».
   Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{15}$.
   (b) On note B l'événement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
   Calculer la probabilité de B.
   (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espèrance mathématique de X.

---

**Eléments de correction (Métropole Juin 2009)**

---

**I.** $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$ $\square$

**II.1.a.** Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

**II.1.b.** De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(\mathrm{B}) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$.

**II.1.c.** De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A\cap B)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{2}{15}$. Ainsi, $p(A)\times p(B)=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{45}$ alors que $p(A\cap B)=\dfrac{2}{15}=\dfrac{6}{45}$ donc $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$ donc $\boxed{\text{les événements A et B ne sont pas indépendants}}$.

**II.2.a.** La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.

$p(X=0)=\dfrac{\binom{7}{0}\times\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{1}{15}$,

$p(X=1)=\dfrac{\binom{7}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{7}{15}$,

$p(X=2)=\dfrac{\binom{7}{2}\times\binom{3}{0}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{7}{15}$. D'où :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ |

**II.2.b.** $E(X)=0\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{7}{5}$ : $\boxed{E(X)=\dfrac{7}{5}}$

**Exercice 3.** (Centre étrangers Juin 2009)

1. **Restitution organisée de connaissances :**
**Prérequis :** On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité $p$ si et seulement si :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

(a) Démontrer que $p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)$.

(b) Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $p$, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :
- R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

(a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

(b) Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

(c) Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

---

**Eléments de correction (Centre étranger Juin 2009)**

---

1. **Restitution organisée de connaissances :**

(a) On a $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$, et il s'agit d'une réunion disjointe, par conséquent :

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$$

(b) Comme A et B sont indépendants alors

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Par conséquent, en utilisant 1.

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\overline{A})$$

2. (a) Il faut calculer $p\left(\overline{R}\cap S\right)$.

   Les événements R et S étant manifestement indépendants, $\overline{R}$ et S le sont aussi.

   Donc $p\left(\overline{R}\cap S\right) = p\left(\overline{R}\right)\times p(S) = (1-0,1)\times 0,05 = 0,9\times 0,05 = 0,045$.

   (b) Il faut que Stéphane entende son réveil et que son scooter marche. La probabilité qu'il soit à l'heure est donc égale à $p\left(\overline{R}\cap\overline{S}\right)$.

   D'après la propriété démontrée au-dessus $\overline{R}$ et $\overline{S}$ sont indépendants, donc

$$p\left(\overline{R}\cap\overline{S}\right) = p\left(\overline{R}\right)\times p\left(\overline{S}\right) = (1-0,1)\times(1-0,05) = 0,9\times 0,95 = 0,855.$$

   (c) Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Stéphane entend son réveil, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

   La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois est :

$$p(X=4)+p(X=5) = \binom{5}{4}\times 0,9^4\times 0,1+\binom{5}{5}\times 0,9^5\times 0,1^0 = 0,5\times 0,9^4+0,9^5 = 0,9^4\times 1,9 = 0,91854\approx 0,9185.$$

**<u>Exercice</u> 4.** (Polynésie Sept. 2008)

*On rappelle que la probabilité d'un événement* A *sachant que l'événement* B *est réalisé se note* $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute $n$ boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute $n$ boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- $B_1$ l'événement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- $B_2$ l'événement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'événement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

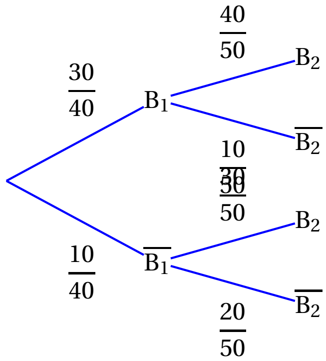
1. Dans cette question, on prend $n = 10$.
   (a) Calculer la probabilité $p(B_1\cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \frac{3}{4}$.
   (b) Calculer $p_{B_2}(B_1)$.
   (c) Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$.
2. On prend toujours $n = 10$. Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.
   On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A.
   (a) Déterminer $p(X=3)$. (On donnera la réponse à $10^{-2}$ près).
   (b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Dans cette question $n$ est un entier supérieur ou égal à 1. Existe-t-il une valeur de $n$ pour laquelle $p(A) = \frac{1}{4}$ ?

---

**Eléments de correction (Polynésie Sept. 2008)**

---

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.
   (a) On a l'arbre de probabilités suivant :



$p(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = p(\mathrm{B}_1) \times p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{B}_2) = \dfrac{30}{40} \times \dfrac{40}{50} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5} = 0,6.$

On calcule de même $p\left(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \mathrm{B}_2\right) = p\left(\overline{\mathrm{B}_1}\right) \times p_{\overline{\mathrm{B}_1}}(\mathrm{B}_2) = \dfrac{30}{50} \times \dfrac{10}{40} = \dfrac{3}{20} = 0,15.$

D'après la loi des probabilités totales $p(\mathrm{B}_2) = p(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) + p\left(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \mathrm{B}_2\right) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{12+3}{20} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

(b) On a $p_{\mathrm{B}_2}(\mathrm{B}_1) = \dfrac{p(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2)}{p(\mathrm{B}_2)} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{5} = 0,8.$

(c) On a $p(\mathrm{A}) = p\left(\mathrm{B}_1 \cap \overline{\mathrm{B}_2}\right) + p\left(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \mathrm{B}_2\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$

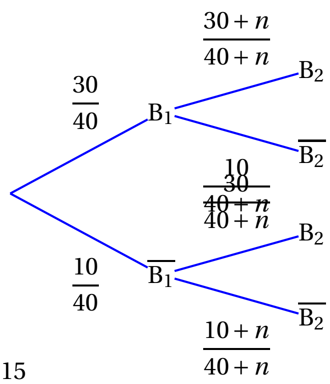
2. (a) On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 8$ et $p = p(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{10}$

La probabilité d'avoir 3 fois l'événement A est :

$$\binom{8}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(1-\frac{3}{10}\right)^{8-3} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^5 \approx 0,254 \approx 0,25.$$

(b) On a $\mathrm{E} = n \times p = 8 \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{5} = 2,4.$

3. On reprend l'arbre précédent, mais en ajoutant $n$ boules :




Ici $p(\mathrm{A}) = \dfrac{30}{40} \times \dfrac{10}{40+n} + \dfrac{10}{40} \times \dfrac{30}{40+n} = \dfrac{15}{40+n}.$

D'où $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{15}{40+n} = \dfrac{1}{4} \iff 60 = 40 + n \iff n = 20.$