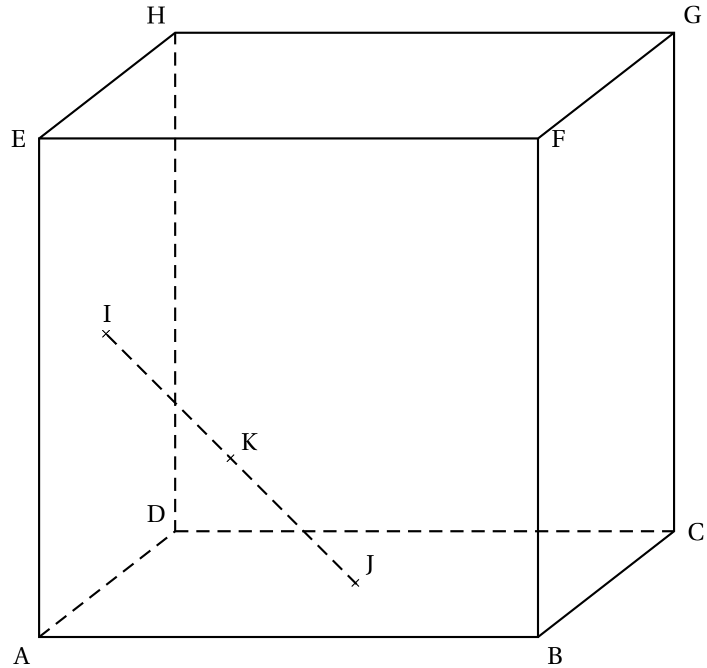
EXERCICES : BARYCENTRE

I) Amérique du Nord juin 2009

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. (a) Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).
   (c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
   Soit L le centre du carré DCGH.
   (a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].
   (b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

II) Métropole & La Réunion sept. 2008

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

   a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. (a) B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.
   (c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.
   (d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :
   (a) la médiatrice de [AC].
   (b) le cercle circonscrit au carré ABCD.
   (c) la médiatrice de [AI].
   (d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.
4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

   est :
   (a) la médiatrice de [AC].
   (b) le cercle circonscrit au carré ABCD.
   (c) la médiatrice de [AI].
   (d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.

III) Pondichéry avril 2007

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3; 2; 6)$, B de coordonnées $(1 ; 2 ; 4)$, et C de coordonnées $(4 ; -2 ; 5)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
   (b) Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.
2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   (b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   (c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.
   (d) Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$$

   (a) Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.
   (b) On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
   (c) Déterminer la distance de G au plan $\mathscr{P}$.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\| 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 5.$$

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathscr{P}$ et Γ ?

IV) Antilles-Guyane juin 2006

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. (a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, -1) ; (D, 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
   (b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (D, 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.
   (c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, m-2) ; (D, m)\}$.
   (a) Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.
   (b) Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).
   (c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
   (d) En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

V) Centres étrangers 2005

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
   $\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}.\right)$
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].
   (a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.
   (a) Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
   (b) Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}$.
   (c) En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

VI) Pondichéry avril 2005

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,4\,;\,-2)$.
   Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.
   (a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   (b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.
   (a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

VII) Nouvelle–Calédonie décembre 2001

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;0\,;2),\quad (3\,;2\,;-4),\quad (1\,;-4\,;2),\quad (5\,;-2\,;4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. (a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x+9y+5z-12=0$.
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   (d) Montrer que : $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de (A, 3), (D, 1) et le barycentre de (B, 3), (C, 1).
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.