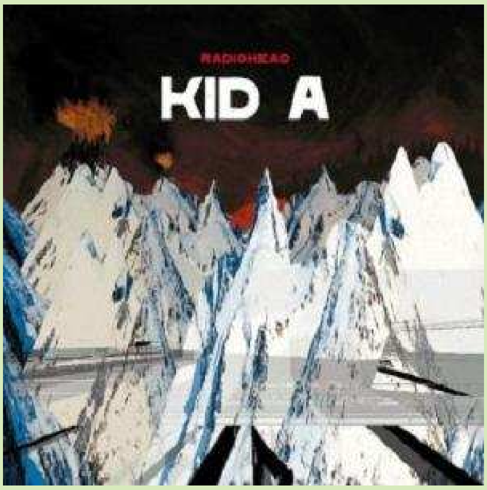
## Chapitre 2

# Récurrences et suites

# Hors Sujet




**Titre** : « Kid A »
**Auteur** : Radiohead
**Présentation succinte de l'auteur** : Kid A est le quatrième album du groupe de rock britannique Radiohead, il est sorti en 2000. Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Ce disque comporte une majorité de chansons composée principalement de synthétiseurs et de boîtes à rythmes (Kid A, Idioteque, Everything in Its Right Place...), tout en gardant des sonorités pop/rock (In Limbo) et en explorant d'autres univers comme le free-jazz (The National Anthem). Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo de la journaliste canadienne Naomi Klein. Les membres du groupe pensaient d'ailleurs au départ à appeler l'album No Logo, en hommage à ce livre qui décrit la société de consommation.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

# Table des matières

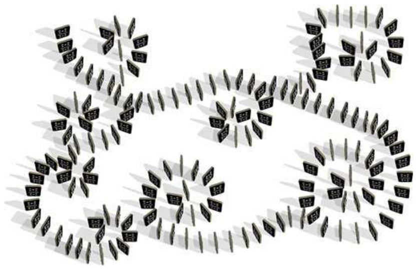

**I) Démonstration par récurrence** **1**
I-1 Exemple introductif . . . 1
I-2 Principe du raisonnement par récurrence et exemples . . . 2
I-3 Démonstration mathématique du principe de raisonnement par récurrence *(Hors Programme)* . . . 4

**II) Approfondissement des notions vues en première** **5**
II-1 Définition d'une suite . . . 5
II-2 Sens de variation d'une suite . . . 5
II-2.1 Définition . . . 5
II-2.2 Etude de la monotonie d'une suite . . . 6
II-2.2.1 Technique fonctionnelle . . . 6
II-2.2.2 Technique algébrique . . . 7
II-2.2.3 Par récurrence . . . 7
II-3 Suites arithmétiques et suites géométriques . . . 8

**III) Comportement asymptotique d'une suite** **10**
III-1 Suite convergente . . . 10
III-2 Suite divergente . . . 12
III-2.1 Définition . . . 12
III-2.2 Cas des suites qui divergent vers $\pm\infty$ . . . 12
III-3 Quelques limites de références . . . 13
III-4 Règles opératoires sur les limites . . . 14
III-4.1 Opérations sur les limites . . . 14
III-4.2 Les formes indéterminées . . . 15
III-4.3 Applications . . . 15
III-5 Théorèmes de comparaison et d'encadrement . . . 15
III-5.1 Comparaison . . . 15
III-5.2 Théorème des gendarmes . . . 16
III-5.3 Passage à la limite dans une inégalité . . . 16
III-6 Suite majorée, minorée, bornée . . . 17
III-6.1 Définition . . . 17
III-6.2 Comment montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée ? . . . 17
III-6.2.1 Technique algébrique . . . 17
III-6.2.2 Technique fonctionnelle . . . 18
III-6.2.3 Par récurrence . . . 18
III-6.3 Théorème des suites monotones bornées et théorème des suites convergentes . . . 18
III-7 Suites adjacentes . . . 19
III-7.1 Définition . . . 19
III-7.2 Théorème . . . 20


« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

# Leçon 2



# Récurrences et suites

**Résumé**

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des fonctions numériques, les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Elles permettent en effet dans les deux cas de fournir une approximation du « réel ». Après avoir mis en place un raisonnement important et fait quelques rappels de première, nous approfondirons la notion de limite de suite, puis nous parlerons d'applications importantes, en particulier les suites adjacentes.

## I) Démonstration par récurrence

### I-1 Exemple introductif

Considérons la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme se calcule à partir du précédent).
<u>But</u> : On souhaiterait obtenir une formule explicite de $u_n$ en fonction de $n$. La suite n'est ni géométrique, ni arithmétique, et la formule ne semble pas évidente, par conséquent on va calculer les premiers termes pour se faire une idée.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \times 1 + 1 = 3 \\ u_2 &= 2 \times 3 + 1 = 7 \\ u_3 &= 2 \times 7 + 1 = 15 \\ u_4 &= 2 \times 15 + 1 = 31 \\ u_5 &= 2 \times 31 + 1 = 63 \end{aligned}$$

Bien, en observant les premiers termes de cette suite il semble logique que $u_6 = 127$, en effet en ajoutant $1$ à chaque terme on obtient les puissances successive de $2$. Autrement dit il **semble** que

$$u_n = 2^n - 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations. **Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?**
Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant, que pour un certain entier $n$, on ait effectivement la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n - 1$
Dans ce cas on aurait : $u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Autrement dit si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ aussi.
On dit que la propriété $\mathscr{P}$ est **héréditaire**.
Au final on a vu que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie au rang $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et $6$ (on dit que la propriété est **initialisée**). Mais comme la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire elle sera vraie au rang $7$, puis au rang $8$, puis au rang $9$, .... Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang. Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence** :

## I-2 Principe du raisonnement par récurrence et exemples

### *Principe du raisonnement par récurrence*

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$)
Si :
- La propriété est initialisée à un certain rang $n_0$ (i.e si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie)
- La propriété est héréditaire à partir du rang $n_0$ (i.e si pour $n \geq n_0$ $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$)

Alors :
La propriété est vraie à tout rang plus grand que $n_0$.

***Exercice 1*** :

Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

***Solutions*** :

On considère la propriété $\mathscr{P}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $0 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie i.e que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour un certain rang $n$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$, par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

la propriété est donc héréditaire, et donc on a montré par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

## Exercice 2 :

Considérons la suite $(u_n)$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = 2^n$$

## Solutions :

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n$

- **Initialisation** : $u_0 = 2^0 = 1$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \leq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1}$

  On a : $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} = 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} - 6 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

On en conclut donc, par récurrence, que $u_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

## Exercice 3 :

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'_n(x) = nx^{n-1}$

## Solutions :

Notons $\mathscr{P}(n)$ : $f_n$ est dérivable

- **Initialisation** : $f_2(x) = x^2$, on a :

$$\frac{f_2(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

  qui tend vers $2x$ lorsque $h$ tend vers $0$, par conséquent $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \geq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que $f_{n+1}$ est une fonction dérivable.

  Notons que $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n \times f_1$, or le produit de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, par conséquent $f_{n+1}$ est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'_{n+1}(x) = f'_n(x)f_1(x) + f_n(x)f'_1(x) = nx^{n-1}x + x^{n-1}x = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

  CQFD

## Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

***Solutions*** :

- **Initialisation** : $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1$$

- **Hérédité** : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ on ait

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$

Montrons que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$, pour cela considérons la fonction $f$ définie sur $I = [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$, de plus la fonction $f$ est dérivable sur $I$ et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$$

Par conséquent $f$ est une fonction strictement croissante sur $I$. On en déduit alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1 \Longrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq u_{n+1} \leq f(1)$$

Or, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(1) = 1$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

## I-3 Démonstration mathématique du principe de raisonnement par récurrence *(Hors Programme)*

**Théorème 1 :**

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si :
- $\mathscr{P}(0)$ est vraie (Initialisation)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie (Hérédité)

Alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

***Preuve***

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit fausse et considérons l'ensemble suivant :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathscr{P}(n) \text{ soit fausse }\}$$

$E$ est donc un ensemble non vide et minorée par $0$, par conséquent il admet un plus petit élément $m \geq 0$ ; on a donc $\mathscr{P}(m)$ fausse et$\mathscr{P}(n)$ vraie $\forall n$tel que$0 \leq n \leq m$. Dans ce cas :
- Si $m = 0$, alors on a $\mathscr{P}(0)$ fausse ce qui contredit la première hypothèse du théorème.
- Si $m > 0$, alors on a $\mathscr{P}(m-1)$ vraie et $\mathscr{P}(m)$ fausse, ce qui contredit la deuxième hypothèse du théorème.

Donc $E$ est vide, autrement dit $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Remarque :** La démonstration est analogue pour une propriété définie sur un intervalle du type $[\![n_0, +\infty[$

# II) Approfondissement des notions vues en première

## II-1 Définition d'une suite

**Définition 1 :**
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang $n_0$. On la note $u$ ou $(u_n)$.

**Remarques :**

– $u_n$ désigne l'image de l'entier $n$, appelé encore terme d'indice $n$ de la suite $u$, terme que l'on pourrait noté $u(n)$ mais la pratique en a voulu autrement. De plus $(u_n)$ désigne l'objet mathématique suite (parfois noté $u$). Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang $n$, comme par exemple la suite suivante :

$$u_n = \sqrt{n-2}$$

qui est définie sur $[\![2, +\infty[$.
Il y a de multiples façons de définir les suites, nous en rencontrons principalement deux. Celle qui sont définies par une « relation de récurrence »et par la donnée de termes initiaux comme par exemple la suite de fibonacci :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Et celles qui sont définies explicitement « en fonction de $n$ »comme celle définie ci-dessus. Les stratégies pour étudier ces différentes suites dépendront de leur type, technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$ et technique de récurrence pour les autres.

– Il est équivalent de dire $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_n = 2u_{n-1} + 3$.

## II-2 Sens de variation d'une suite

### II-2.1 Définition

**Définition 2 :**
Soit $(u_n)$ une suite de nombre réels. On dit que la suite $(u_n)$ est

– croissante (à partir du rang $n_0$) si et seulement $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$ où $n \in \mathbb{N}$
– décroissante (à partir du rang $n_0$) si et seulement $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$ où $n \in \mathbb{N}$
– monotone (à partir du rang $n_0$) si et seulement elle est croissante ou décroissante (à partir du rang $n_0$)
– stationnaire (à partir du rang $n_0$) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$ (si la suite est définie à partir du rang $n_0$ alors on dit que la suite est constante)

**Remarque :** On définit la stricte croissance ou décroissance à l'aide des inégalités strictes suivantes :

$$u_n < u_{n+1} \text{ ou } u_n > u_{n+1}$$

**Remarque :**

– Une suite stationnaire est constante si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ $\forall n$. Il existe donc des suites stationnaires non constante, par exemple :

$$u_n = \text{Partie Entière de } \frac{1}{n}$$

– Il existe des suites non monotone, par exemple

$$u_n = (-1)^n$$

### II-2.2 Etude de la monotonie d'une suite

#### II-2.2.1 Technique fonctionnelle

**Théorème 2 :**
On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = f(n)$, avec $f$ définie sur l' intervalle $[a; +\infty[$, où $a \geq 0$
Si la fonction $f$ est monotone (resp. strictement monotone) sur $[a; +\infty[$ alors la suite $(u_n)$ est monotone (resp. strictement monotone) et possède le même sens de variation que la fonction $f$

**Remarque :** La réciproque de ce théorème est fausse i.e que l'on peut trouver une suite croissante, par exemple, définie par une fonction non croissante, comme le montre l'exemple où $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et $u_n = f(n) = n$.
*Les tracer sur la calculatrice.*

**Contre-Exemple :**
Soit $u(_n)$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. La monotonie de $f$ n'entraîne pas celle de $u$, comme le montre l'exemple où $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
*Les tracer sur papier, en choisissant deux valeurs possibles pour $u_0$.*

**Exemple :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \cos \frac{\pi}{n}$ pour $n \geq 1$

Notons $f$ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$

On a en dérivant : $f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$

Or, pour $x \geq 1$, $\frac{\pi}{x} \in ]0; \pi]$ donc $\sin \frac{\pi}{x} \geq 0 \iff f'(x) \geq 0$, donc la fonction $f$ est croissante sur $[1; +\infty[$, par conséquent la suite $(u_n)$ est croissante.

***Exercice 5*** **:**
On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$$

Montrer que $(u_n)$ est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$

***Preuve***

1. Cas 1 : $f$ est strictement croissante sur $[a; +\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, $f$ étant strictement croissante sur $[a; +\infty[$,
   $$f(n) < f(n + 1) \iff u_n < u_{n+1}$$
   Par conséquent, $(u_n)$ est strictement croissante.
2. Cas 2 : $f$ est strictement décroissante sur $[a; +\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, $f$ étant strictement décroissante sur $[a; +\infty[$,
   $$f(n) > f(n + 1) \iff u_n > u_{n+1}$$
   Par conséquent, $(u_n)$ est strictement décroissante.

### II-2.2.2 Technique algébrique

**Méthodes :**

- **On étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de $n$ :**
  Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 + 2$, alors on a

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$$

  Ainsi pour tout $n$ on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$
  On voit que $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n$ : la suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$

- **Si jamais tous les termes de la suite $u$ sont <u>strictement positifs</u> ou <u>strictement négatifs</u> , on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :**
  Par exemple, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 \times 5^n$ , on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n$ et

$$u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$$

  Ainsi pour tout $n$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$$

  On voit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n$ : la suite est donc strictement croissante sur $[\![0, +\infty[\![$

**Exemple :**

On considère la suite $u$ définie par $u_n = 2n + \sin n$
Étudions, pour tout entier $n$, le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, par conséquent :

$$2 + \sin(n+1) - \sin n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

La suite $u$ est donc strictement croissante.

***<u>Exercice 6</u>*** **:**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$

### II-2.2.3 Par récurrence

***<u>Exercice 7</u>*** **:**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**Solutions :**

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_{n+1} < u_n$

- **Initialisation** : $u_0 = 16$ et $u_1 = 4$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
  On a donc :

$$\begin{array}{rll} & 0 \leq u_{n+1} < u_n & \text{puisque } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie} \\ \iff & 0 \leq \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n} & \text{puisque } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff & 0 \leq u_{n+2} < u_{n+1} & \\ \iff & \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie} & \end{array}$$

On vient de démontrer par récurrence que $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

## II-3 Suites arithmétiques et suites géométriques

**Définition 3 :**

Une suite $u$ de premier terme $u_0$ et de raison $r$ est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier $n$, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

**Exemple :**

Léa dépose $100$€ sur son compte. Tous les ans il ajoute $10$€ . Si on note $u_n$ l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. On a :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$$

$u$ est donc une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 100.

**Propriété 1 :**

- **Relation entre $u_n$ et $u_0$ :** Pour tout $n$, on a $\boxed{u_n = u_0 + nr}$
- **Relation entre $u_n$ et $u_p$ :** Pour tous $n$, on a $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

**Exemple :**

Au bout de 20 ans, Léa dispose de $300$€ sur son compte. En effet $u_n = 100 + 10n$ et donc : $u_{20} = 100 + 10 \times 20 = 300$

**Définition 4 :**

Une suite $u$ de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier $n$, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$$

**Exemple :**

Max dépose $100$€ sur son compte. Tous les ans il gagne $3\%$ de plus. Si on note $v_n$ l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{ième}$ année, on a :

$$\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = v_n \times 1,03 \end{cases}$$

$v$ est donc une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 100.

**Propriété 2 :**

- **Relation entre $u_n$ et $u_0$ :** Pour tout $n$, on a $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$
- **Relation entre $u_n$ et $u_p$ :** Pour tous $n$, on a $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

**Exemple :**

Au bout de 20 ans, Max dispose de $180,61$€ sur son compte. En effet $v_n = 100 \times 1,03^n$ et donc : $v_{20} = 100 \times 1,03^{20} = 180,61$

**Théorème 3 :**
La somme S de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme $p$ et de dernier terme $d$ est :

$$\boxed{S = n \times \frac{p+d}{2}}$$

**Exemple :**

$$u_{10} + u_{11} + ... + u_{20} = 11 \times \frac{u_{10} + u_{20}}{2} = 2200$$

**Théorème 4 :**
La somme S de $n$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $p$ est :

$$\boxed{S = p \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$

**Exemple :**

$$v_1 + v_2 + ... + v_{20} = v_1 \times \frac{1-1,03^{20}}{1-1,03} = 2767,65$$

**Théorème 5 :**
On considère une suite $(u_n)$ arithmétique de raison $r$.

1. Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante ;
2. Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)$ est constante ;
3. Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**Exemple :**

$r = 10 > 0 \Longleftrightarrow$ la suite $(u_n)$ est croissante

**Théorème 6 :**
Soit $(u_n)$ une suite définie par : $u_n = q^n$ (avec $q > 0$) alors :
- Si $q \in [0; 1[$ la suite $(u_n)$ est convergente vers $0$
- Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)$ est constante $1$
- Si $q > 1$ alors la suite $(u_n)$ est divergente.

**Exemple :**

$q = 1,03 > 1 \Longleftrightarrow$ la suite $(v_n)$ est divergente

**Application :**
Un étudiant loue une chambre pour $3$ ans. On lui propose deux types de bail. [a]
$1^{er}$ contrat :
Un loyer de $200$€ pour le premier mois puis une augmentation de $5$€ par mois jusqu'à la fin du bail.
$2^{ème}$ contrat :
Un loyer de $200$€ pour le premier mois puis une augmentation de $2\%$ par mois juqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (i.e du $36^{ème}$ mois).
3. Quel est le contrat globablement le plus avantageux pour un bail de $3$ ans ?

a. Un bail est un contrat de location

**Solutions :**

1. On considère la suite $(u_n)$ arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 200$ tel que $u_{n+1} = u_n + 5$ et la suite $(v_n)$ géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $v_0 = 200$ tel que $v_{n+1} = 1,02 \times v_n$
   Pour le premier contrat le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois sont donnés par $u_2$ puis $u_3$ :
   $$u_2 = u_1 + 5 = 200 + 5 = 205\text{€} \qquad u_3 = u_2 + 5 = 205 + 5 = 210\text{€}$$
   Pour le deuxième contrat le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois sont donnés par $v_2$ puis $v_3$ :
   $$v_2 = v_1 \times 1,02 = 200 \times 1,02 = 204\text{€} \qquad v_3 = v_2 \times 1,02 = 204 \times 1,02 = 208,08\text{€}$$
2. Le loyer du dernier mois est donnée par $u_{36}$ pour le premier contrat et $v_{36}$ pour le deuxième contrat :
   $$u_{36} = u_1 + (36-1) \times 5 = 200 + 35 \times 5 = 375\text{€} \qquad v_{36} = v_1 \times 1,02^{35} = 200 \times 1,02^{35} \simeq 400\text{€}$$
3. Pour cela il faut calculer la somme des 36 premiers loyers i.e il faut calculer $S_1$ et $S_2$ où :
   $$S_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{36} = \frac{36 \times (200 + 375)}{2} = 18 \times 575 = 10350\text{€}$$
   Et
   $$S_2 = v_1 + v_2 + \cdots + v_{36} = 200 \times \frac{1 - 1,02^{36}}{1 - 1,02} \simeq 10398\text{€}$$
   Au final le premier contrat semble plus avantageux et permettrait de réaliser une économie d'environ 40€

# III) Comportement asymptotique d'une suite

## III-1 Suite convergente

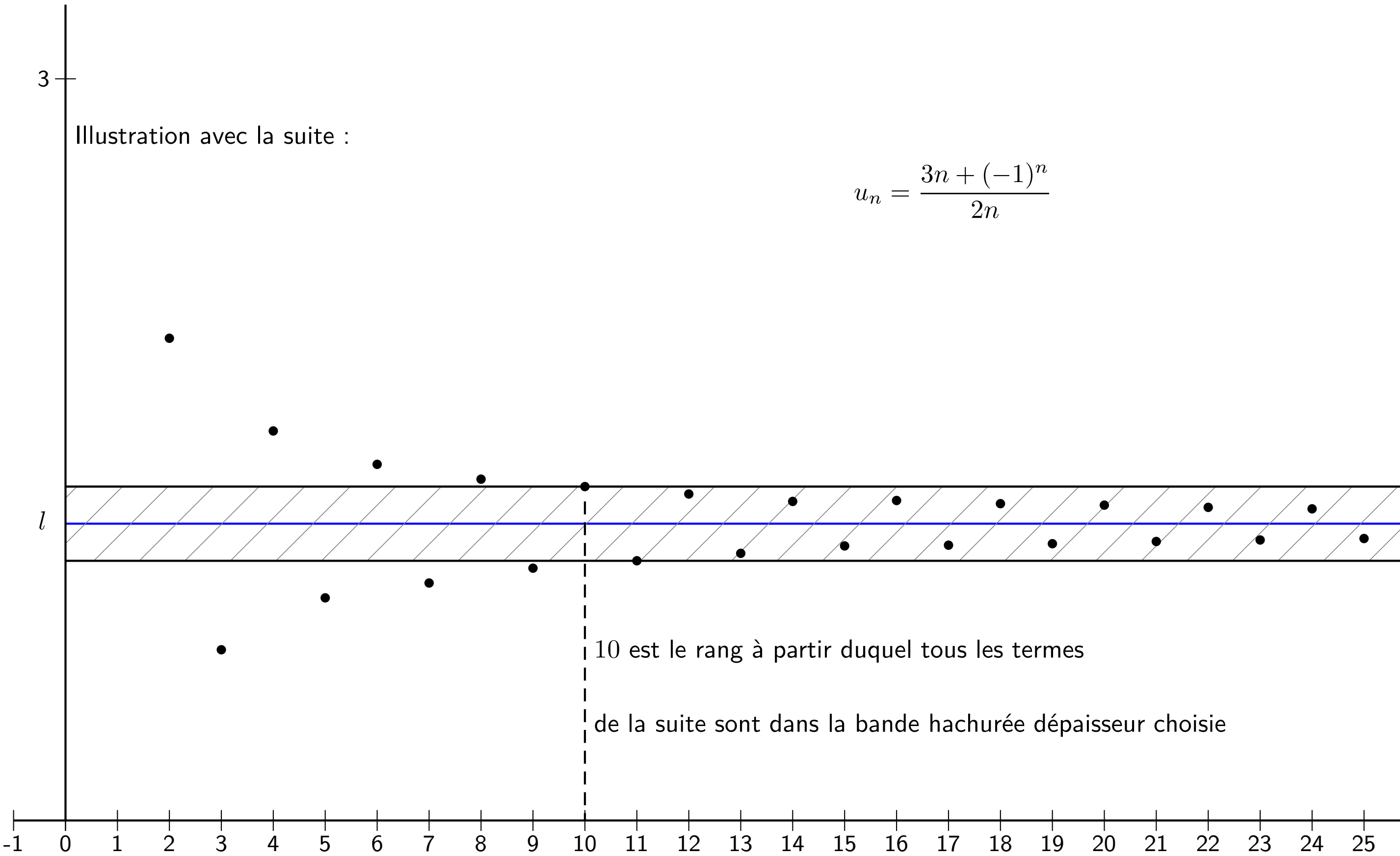
**Définition 5 :**
On dit qu'une suite admet une limite $\ell$ (ou converge vers $\ell$) lorsque :
Tout intervalle ouvert centré en $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang

**Remarque :** On utilise en général un intervalle centré en $\ell$.

**Exemples :**

La suite $\left(\frac{1}{n} - 2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-2$.
La suite $\left(\frac{3n^2 - 4}{-2n^2 + 5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite $-\frac{3}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'admet pas de limite.

**Remarques :**
- Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite
- Graphiquement, la notion de limite se traduit ainsi :
  Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.
- De manière plus formelle : Pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, il existe un rang $N$ tel que pour tout indice $n$, on ait :
  $$n \geq N \Longrightarrow | u_n - \ell | \leq \varepsilon$$




**Remarque :**

1. Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite $(u_n)$ converge vers $\frac{3}{2}$
2. Notons, par ailleurs, que toutes les suites ne sont pas convergentes, par exemple $u_n = n$ ne converge pas car sa limite vaut $+\infty$ ou encore $u_n = (-1)^n$ est une suite qui n'admet pas de limite (valant tantôt $1$, tantôt $-1$).

**Théorème 7 :**

Si une suite $(u_n)$ converge alors sa limite $\ell$ est unique

***Preuve***

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)$ admet deux limites $\ell_1$ et $\ell_2$ telles que $\ell_1 < \ell_2$.
Notons $d = \ell_2 - \ell_1$ Par définition, l'intervalle ouvert $I_1$ de centre $\ell_1$ et de rayon $\frac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, de même l'intervalle ouvert $I_2$ de centre $\ell_2$ et de rayon $\frac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, par conséquent $I_1 \cap I_2$ est un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Or, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, ce qui est absurde
Par conséquent la suite $(u_n)$ ne peut admettre qu'une limite.

## III-2 Suite divergente

### III-2.1 Définition

**Définition 6 :**
On dit qu'une suite qui ne converge pas est divergente. Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite

**Exemple :**
Voici quelques suites divergentes :
- $u_n = n$
- $u_n = n^3 - n^2 + n - 1$
- $u_n = (-1)^n$

### III-2.2 Cas des suites qui divergent vers $\pm\infty$

**Définition 7 :**
On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalle du type $]-\infty; A[$

***Exercice 8*** **:**
On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer, par récurrence, que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$

***Solutions*** **:**
Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(u_n)$ est croissante, on veut montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > k$, en effet dans ce cas l'intervalle ouvert $]k; +\infty[$ contiendra tous les termes de la suite à partir de $n_0$.
Notons $\mathscr{P}(k)$ la propriété suivante : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > k$
- **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, en effet $u_1 > 0$
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. On remarque que

$$u_{2n} = u_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq u_n + n \times \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2}$$

  Puisque $\mathscr{P}(k)$ est vraie, il existe un entier $n_0$ tel que $u_{n_0} > k$, par conséquent :

$$u_{4n_0} \geq u_{2n_0} + \frac{1}{2} \geq u_{n_0} + 1$$

  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On vient de démontrer, par récurrence, que $(u_n)$ est une suite qui diverge vers $+\infty$

**Remarque :** La suite précédente est appelée **suite harmonique**. En calculant les premières sommes partielles de la série harmonique, il apparaît que la suite de nombres obtenus est croissante, mais à croissance lente : on pourrait croire qu'il s'agit d'une suite convergente. [1]

1. Elle fait partie de la famille plus large des séries de Riemann, qui sont utilisées comme séries de référence : la nature d'une série est souvent déterminée en la comparant à une série de Riemann et en utilisant les théorèmes de comparaison.

## III-3 Quelques limites de références

**Propriété 3 :**
Voici quelques limites à connaître absolument :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

***Preuve*** **Hors Programme**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
   Soit $A$ un réel positif. On veut montrer que tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir d'un certain rang $n_0$.
   On a $\sqrt{n} > A \iff n > A^2$, donc :
   $$\text{pour n'importe quel entier } n_0 \text{ vérifiant } n_0 > A^2 \text{ on a } u_{n_0} = \sqrt{n_0} > A$$
   Donc tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir de $n_0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
   Soit $A$ un réel positif. On veut montrer que tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir d'un certain rang $n_0$.
   On a $n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$, donc :
   $$\text{pour n'importe quel entier } n_0 \text{ vérifiant } n_0 > \sqrt{A} \text{ on a } u_{n_0} = {n_0}^2 > A$$
   Donc tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir de $n_0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
   Soit $\epsilon$ un réel positif. On veut montrer que tous les termes de la suite appartiennent à $I = ]-\epsilon;+\epsilon[$ à partir d'un certain rang $n_0$.
   Dans un premier, on remarque que $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout entier $n$, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier $n$ on a :
   $$\frac{1}{n} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n$$
   Par conséquent :
   $$\text{pour n'importe quel entier } n_0 \text{ vérifiant } n_0 > \frac{1}{\epsilon} \text{ on a } u_{n_0} \in ]-\epsilon;+\epsilon[$$
   donc tous les termes de la suite $(u_n)$ appartiennent à $I$ à partir de $n_0$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
   Soit $\epsilon$ un réel positif. On veut montrer que tous les termes de la suite appartiennent à $I = ]-\epsilon;+\epsilon[$ à partir d'un certain rang $n_0$.
   Dans un premier, on remarque que $\dfrac{1}{n^2} > 0$ pour tout entier $n$, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier $n$ on a :
   $$\frac{1}{n^2} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n^2 \iff \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < n$$
   Par conséquent :
   $$\text{pour n'importe quel entier } n_0 \text{ vérifiant } n_0 > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ on a } u_{n_0} \in ]-\epsilon;+\epsilon[$$
   donc tous les termes de la suite $(u_n)$ appartiennent à $I$ à partir de $n_0$.

**Exercice 9** :

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 4}{4n^2 - 1}$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$

**Théorème 8 :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ du type $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)$ une suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
2. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**Remarques :**

- Par conséquent, on récupère toutes les règles de calculs sur les limites. De plus les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes sont valables pour les suites.
- Notons que la réciproque du résultat précédent est fausse, par exemple la suite $u_n = \cos(2\pi n)$ est constante et égale à $1$ donc admet bien une limite tandis que la fonction $x \longmapsto \cos(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Rappelons les deux résultats importants :
  * La limite en l'infini d'une expression polynômiale est la limite du terme de plus haut degré.
  * La limite en l'infini d'une expression rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

## III-4 Règles opératoires sur les limites

### III-4.1 Opérations sur les limites

Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites.

**Cas d'une somme :** $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n)$

| lim $a_n$ \ lim $b_n$ | $b \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}$ | $a + b$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $-\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

**Cas d'un produit :** $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n b_n)$

| lim $a_n$ \ lim $b_n$ | $b \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a \neq 0$ | $a \times b$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $\pm\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Si $a = 0$ et si $b \in \mathbb{R}$ alors le produit $a_n b_n$ tend vers $0$.

**Cas d'un quotient :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n}$

| lim $a_n$ \ lim $b_n$ | $b \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a \neq 0$ | $\frac{b}{a}$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $0$ | ? | ? |
| $-\infty$ | $0$ | ? | ? |

Si $a = 0$ et si $b \neq 0$ alors le quotient $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\pm\infty$.

**Remarque :** Il faut être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent (et certains ne sont pas évidents), nous ne présenterons ici aucune démonstration et nous admettrons tous ces résultats.

### III-4.2 Les formes indéterminées

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

$$« 0 \times \infty » \qquad « \frac{0}{0} » \qquad « \frac{\infty}{\infty} » \qquad « \infty - \infty »$$

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers $0$ est une forme indéterminée »

### III-4.3 Applications

***Exercice 10*** **:**

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n^2} + 3n - 4$
2. $u_n = \frac{3n+1}{n} + \frac{5}{n^2}$
3. $u_n = \frac{-3}{2n^2+3}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

## III-5 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

### III-5.1 Comparaison

**Théorème 9 :**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$$

- Si $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)$ aussi.
- Si $(v_n)$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)$ aussi.

***Preuve***

Considérons $A$ un réel. Supposons que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ : dans ce cas, à partir d'un certain rang $N$ tous les termes de la suite $(u_n)$ vérifient : $u_n > A$, par conséquent on aussi à partir du rang $N$, $v_n > A$, ce qui prouve que $(v_n)$ diverge vers $+\infty$.
La deuxième démonstration est analogue.

***Exercice 11*** **:**

Etudier la limite de la suite $(u_n)$ où

$$u_n = 2\cos n + 3 \times (-1)^n - 3n$$

## *Exercice 12* :

Etudier la limite de la suite $(u_n)$ où

$$u_n = n^4(\cos n - 2)$$

## *Exercice 13* :

1. Etudier la limite de la suite $(u_n)$ où

$$u_n = (-1)^n + n$$

2. Que penser de l'affirmation suivante :
« toute suite divergente vers $+\infty$ est nécessairement croissante. »

### III-5.2 Théorème des gendarmes

**Théorème 10 :**

Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites telles que :

1. à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

***Preuve***

Soit $I$ un intervalle ouvert contenant $l$ Notons $n_0$ le rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ $n_1$ le rang à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)$ sont contenus dans $I$ et $n_2$ le rang à partir duquel tous les termes de la suite $(w_n)$ à partir duquel tous les termes de la suite $(w_n)$ sont contenus dans $I$.
Notons $N = max(n_0; n_1; n_2)$, alors on a :

- à partir du rang $N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- en vertu du point précédent, tous les termes de la suite $v_n$ sont contenus dans $I$ à partir du rang $N$, ce qui prouve que la suite $(v_n)$ converge vers $l$

## *Exercice 14* :

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $v_n = \dfrac{3n + 2 \times (-1)^n}{2n}$
2. $v_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ [a]

a. On montrera que $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

### III-5.3 Passage à la limite dans une inégalité

**Théorème 11 :** ***admis***

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergentes telles que pour tout entier $n$ : $u_n \leq v_n$ (resp $u_n < v_n$) alors dans ces deux cas on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

## III-6 Suite majorée, minorée, bornée

### III-6.1 Définition

**Définition 8 :**

On considère une suite $(u_n)$.
- On dit que $(u_n)$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que $(u_n)$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que $(u_n)$ est bornée si elle est majorée et minorée i.e s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Remarque :** $(u_n)$ est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $| u_n |< M$.
En effet si tel est le cas alors on a : $-M < u_n < M$.
Réciproquement si $(u_n)$ est bornée alors il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $a < u_n < b$.
Choisissons $M = max(| a |; | b |)$, dans ce cas on a $-M \leq a$ et $b \leq M$, et donc :

$$| u_n |< M$$

### III-6.2 Comment montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée ?

#### III-6.2.1 Technique algébrique

**Exemple :**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$. Montrons que $(u_n)$ est bornée.

$$\begin{array}{lcl} & -1-1 \leq (-1)^n + \sin n \leq 1+1 & \text{en effet } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin n \leq 1 \\ \iff & -2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq 1 & \\ \iff & -2 \leq u_n \leq 2 & \end{array}$$

***Exercice 15*** **:**

On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

.

1. Montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$$
.
4. En déduire que $u_n$ est majorée.

### III-6.2.2 Technique fonctionnelle

**_Exercice 16_ :**

On considère la suite définie par :

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$
2. Dresser le tableau de variation de $f$
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée.

### III-6.2.3 Par récurrence

**_Exercice 17_ :**

Soit la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$$

Montrer, par récurrence, que cette suite est bornée.

**_Solutions_ :**

Compte tenu de la définition de la suite (et de la présence du signe radical), on peut minorée la suite par $0$, mais par quoi la majorée ? ? Le calcul des premiers termes, donne ici une indication :

$$u_1 \simeq 2,45 \qquad u_2 \simeq 2,91 \qquad u_3 \simeq 2,98$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\boxed{0 \leq u_n \leq 3}$$

- **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie de manière évidente puisque $u_0 = 0$
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Dans ce cas on a : $0 \leq u_n \leq 3$
  Par conséquent : $6 \leq 6 + u_n \leq 9$
  Et par passage à la racine : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$
  Au final : $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$
  Par conséquent $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et on vient de montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

  $$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

  i.e que $(u_n)$ est une suite bornée.

### III-6.3 Théorème des suites monotones bornées et théorème des suites convergentes

**Théorème 12 :**

Si $(u_n)$ est une suite convergente alors $(u_n)$ est bornée.

***Preuve***

Notons $l$ la limite de la suite $(u_n)$, alors tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]l-1;l+1[$ à partir d'un certain rang i.e qu'à partir d'un rang que nous noterons $N$ on a :

$$l-1 < u_n < l+1$$

Notons $m = min(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{N-1}; l-1)$ et $M = max(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{N-1}; l-1)$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leq u_n \leq M$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est bornée.

**Théorème 13 : *Admis***

Toute suite croissante et majorée de réels converge.
Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

***Exercice 18*** :

1. On considère la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
Montrer que $u_n$ est convergente. [a]
2. On considère la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$
Le but de cette question est de montrer que $u_n$ est convergente. [b]
   (a) Montrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n) : n! \geq 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
   (b) Montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2$$
   (c) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3$$
   (d) Conclure.

*a*. Sa limite, difficile à déterminer vaut $\frac{\pi^2}{6}$
*b*. Sa limite est un nombre irrationnel, noté $e$ que nous définirons plus tard dans l'année.

## III-7 Suites adjacentes

### III-7.1 Définition

**Définition 9 :**

Lorsque :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ (v_n - u_n) \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

on dit ques les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

### Exercice 19 :

On considère la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

et la suite $(v_n)$ définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$
Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

## III-7.2 Théorème

**Théorème 14 :**
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes alors $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite $\ell$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

### Preuve

On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ adjacentes, avec $(u_n)$ croissante et $(v_n)$ décroissante.
Montrons tout d'abord que $u_n \leq v_n$, pour cela notons $w_n = v_n - u_n$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$$

Par conséquent $(w_n)$ est une suite décroissante, on a donc pour tout $m > n$, $w_m \leq w_n$, et par passage à la limite lorsque $m \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$0 \leq w_n \Longleftrightarrow u_n \leq v_n$$

Et aussi :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Comme $(u_n)$ est une suite croissante majorée, elle converge vers un certain réel $\ell$.
De même comme $(v_n)$ est une suite décroissante minorée, elle converge vers un certain réel $\ell'$
Enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \ell' - \ell = 0$
Par unicité de la limite on obtient : $\ell = \ell'$

### Exercice 20 :

En considérant les deux suites de l'exercice précédent, déterminer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de leur limite commune $\ell$ [a]

a. On cherche à partir de quel entier $n$ on a $v_n - u_n \leq 10^{-1}$

### Exercice 21 :

On considère la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 0$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et la suite $(v_n)$ définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$
Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et déterminer une valeur approchée à $10^{-1}$ près de leur limite commune $\ell$