Exercices : Les nombres, équations et inéquations

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Parmi les écritures suivantes, lesquelles désignent un entier pair :

   i. $2n$ ii. $2n+1$ iii. $4n$ iv. $4n+2$ v. $4n+3$

   (b) Parmi les écritures suivantes, lesquelles désignent un entier impair :

   i. $2n$ ii. $2n+1$ iii. $4n$ iv. $4n+2$ v. $4n+3$

   (c) Quels sont tous les entiers (naturels) qui peuvent s'écrire comme somme de deux entiers consécutifs ?
2. (a) Peut-on trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 924 ? 455 ?
   (b) Quels sont tous les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de trois entiers consécutifs ?
3. (a) Peut-on trouver quatre entiers consécutifs dont la somme est 444 ? 446 ?
   (b) Quels sont tous les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de quatre entiers consécutifs ?

Exercice 2. Démontrer que les nombres suivants sont des entiers :

1. $\dfrac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$ 3. $\dfrac{3^{10}}{243}$ 4. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{2}$

Exercice 3. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.[1]

On pose : $a=\dfrac{p+1}{2}$ et $b=\dfrac{p-1}{2}$

1. Expliquer pourquoi a et b sont des entiers.
2. Calculer a^2-b^2 en fonction de p.
3. Démontrer que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme la différence de deux entiers.
4. Application : donner cette différence pour $p=29$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes et dire à quels ensembles de nombres appartiennent leurs solutions :

1. $(3x-2)(2x+1)=x(6x-2)$
2. $\left(\sqrt{8}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}x+\sqrt{3}\right)=0$
3. $ax+b=0$ sachant que $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$
4. $x^2-\pi x=0$

Exercice 5. Que penser des affirmations suivantes ? *Justifier* à l'aide d'expressions algébriques.

– Pour doubler l'aire d'un carré, il suffit de doubler la longueur du côté.
– Si l'on augmente le côté d'un carré de 3 cm, son aire sera augmentée de 9 cm^2.
– $ABCD$ est un carré. Si l'on réduit AB de 1cm et qu'on allonge BC de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu sera égale à celle du carré de départ.
– $NOUK$ est un carré. Si l'on réduit le côté NO de 1cm et qu'on allonge OU de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu aura diminué de 1 cm^2 par rapport à celle du carré de départ.

Exercice 6.

1. (a) Calculer sans calculatrice : $1\,000^2-999^2$; $1\,001^2-1\,000^2$; $1\,002^2-1\,001^2$
   (b) Que peut-on conjecturer à partir de ces trois résultats ?

1. On rappelle qu'un nombre entier $p>1$ est premier si et seulement il est divisible seulement par 1 et par lui-même

2. Pour tout entier positif n, montrer que $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
3. En déduire que tout nombre impair est une différence de deux carrés consécutifs.
4. Ecrire 199 comme différence de deux carrés.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer grâce aux équations que $0,999\,999\cdots = 1$!

1. On considère le nombre rationnel $A = \dfrac{19}{11}$.
   (a) Donner le développement décimal de A avec 8 chiffres significatifs (précision à 10^{-8}).
   (b) A semble-t-il décimal ?
   (c) On dit que A a une écriture périodique. Préciser sa période (nombre entier qui se répète à l'infini dans le développement décimal du nombre).
2. On considère le nombre $x = 0,131313\ldots$
   (a) Montrer que $100x = 13 + x$
   (b) En déduire la valeur de x et sa nature.
3. Par le même raisonnement, déterminer l'écriture fractionnaire du nombre y dont le développement périodique est $y = 0,173173173\ldots$ avec pour période 173 (on note ce genre de nombre ainsi $y = 0,\underline{173}$).
4. En remarquant que le nombre $a = 3,\underline{40}$ peut s'écrire $3 + 0,\underline{40}$, montrer que $a = \dfrac{337}{99}$.
   Il est démontré que, contrairement au nombre irrationnels (tel π ou $\sqrt{2}$), tout nombre rationnel admet un développement périodique.
5. Montrer par le même raisonnement que $0,\underline{9} = 1$

Ce dernier résultat n'est pas une erreur : la notation $0,\underline{9}$ est une autre écriture de 1 !

Exercice 8. Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 9. Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$. Représenter cet ensemble sur une droite graduée.

Exercice 10. Soient x et y deux réels.

1. On considère l'algorithme suivant :
   – Entrée : Saisir x et y
   – Traitement :
     – a prend la valeur $(x+y)^2$
     – b prend la valeur $(x^2 + y^2)$
   – Sortie : Afficher $a - b$

   (a) Qu'affiche l'algorithme pour $x = 3$ et $y = 4$? $x = 3$ et $x = -4$? $x = -3$ et $y = -4$?
   (b) Conjecturer le signe $a - b$ suivant les signes de x et y.
   (c) En déduire la comparaison de a et b suivant les signes de x et y.
2. Développer et réduire $(x+y)^2 - (x^2 + y^2)$
3. En déduire la comparaison du carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés

Exercice 11. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{4-3x}{2x-1} < 0$
2. $(5x-7)(2x-6) \geq 0$