Chapitre 5

Les vecteurs du plan

Hors Sujet

Titre : « Faites le mur »
Auteur : Banksy
Présentation succinte de l'auteur : Faites le mur ! est un film (?) ou un documentaire (documenteur !) réalisé par Banksy, sorti en salle le 15 décembre 2010. Thierry Guetta, un commerçant français excentrique, documentariste amateur vivant à Los Angeles, présenté dans le film comme le cousin de l'artiste Space Invader, aurait amassé une considérable archive d'interviews et d'action de Zevs, Shepard Fairey, André etc. A mesure qu'il filme de manière compulsive la nouvelle génération de l'art urbain, son obsession pour Banksy, le célèbre pochoiriste britannique se fait plus dévorante. Ils se rencontrent enfin. Banksy incite Guetta - au vu de la médiocrité de ses productions audiovisuelles - à se tourner vers l'art urbain. C'est alors que naît l'artiste Mr Brainwash.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I) Translation de vecteur $\vec{u}$ **2**
I-1 Définition . . . 2
I-2 Translation et vecteur associé . . . 2
I-3 Propriétés . . . 3

II) Les vecteurs du plan **6**
II-1 Caractérisation . . . 6
II-2 Egalité de deux vecteurs et opposés . . . 7

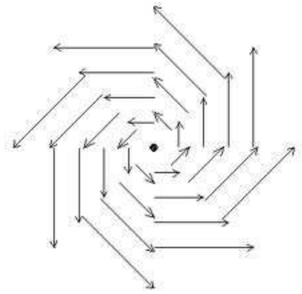
III) Opérations sur les vecteurs **9**
III-1 Somme de deux vecteurs . . . 9
III-2 Différences de deux vecteurs . . . 11
III-3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel . . . 11
III-3.1 Définition . . . 11
III-3.2 Règles de calcul . . . 12

IV) Vecteurs et repérages **13**
IV-1 Coordonnées d'un vecteurs . . . 13
IV-2 Coordonnées du milieu d'un segment et distance AB . . . 14
IV-3 Opérations et coordonnées . . . 14

V) Colinéarité **15**
V-1 Conditions de colinéarité . . . 15
V-2 Alignement . . . 16

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 5



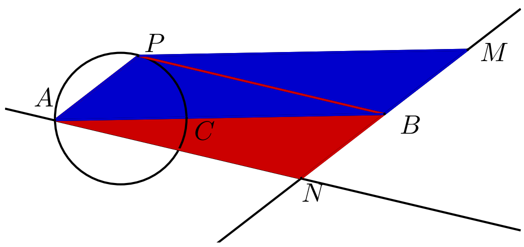
Les vecteurs du plan

Résumé

Lorsque René Descartes étudie la réflexion et la réfraction de la lumière, il invente la géométrie analytique, la géométrie des coordonnées. On parle d'ailleurs de « coordonnées cartésiennes ». La nécessité de mettre au point des techniques de calcul utilisant plus la géométrie conduit Leibniz à inventer le calcul vectoriel, qui sera approfondi par Gauss. La notion de vecteur est donc présente dès le XVI ème siècle mais aucune définition précise n'est proposée, au XIX ème siècle l'anglais Hamilton donne la définition mathématique actuelle du mot vecteur. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser un nouvel outil que sont les vecteurs et le calcul vectoriel dans la résolution de problème géométrique.

Problème d'introduction

Soit deux points distincts A et B. C est un point du segment $[AB]$ distinct de A et B. P est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AC]$. Soit N le point du plan tel que $APBN$ soit un parallélogramme, et M tel que $APMB$ soit un parallélogramme.



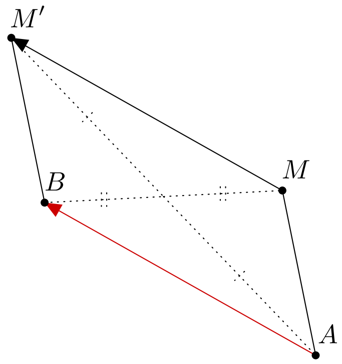
Question :

Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis conjecturer la position des points M, N, et B. Enfin on démontrera cette conjecture.

I) Translation de vecteur $\vec{u}$

I-1 Définition

Définition 1 :
La translation qui transforme A en B, associe à tout point M du plan l'unique point N tels que $ABNM$ soit un parallélogramme.



Remarques :
- La translation qui transforme le point A en B, associe à tout point M l'unique point N tel que les segments $[AN]$ et $[BM]$ ont le même milieu.
- Si $A = B$, tout point M est confondu avec son image M' par la translation ; on dit aussi que tout point M est invariant, et que la translation est l'identité du plan.

I-2 Translation et vecteur associé

Définition 2 :
On considère la translation qui transforme A en B et M en M', à cette translation on associe le vecteur $\overrightarrow{u}$ qui symbolise le déplacement de A vers B ou de M vers N. On le représente par une flèche allant de A jusqu'à B.

Remarques :
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ symbolise une absence de déplacement, on l'appelle le vecteur nul et on note

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ symbolisent le même déplacement puisqu'ils sont associés à la même translation t, on dit que ce sont deux représentants d'un même vecteur $\vec{u}$. On parle alors de translation de vecteur $\vec{u}$, il s'agit de la translation associé au déplacement symbolisé par le vecteur $\vec{u}$.
- D'après la remarque précédente on peut représenter un même vecteur à partir de n'importe quel point du plan si l'on respecte le même déplacement.

I-3 Propriétés

Propriété 1 :
Par une translation l'image de trois points alignés est trois points alignés

Preuve

Soit A, B et C trois points alignés et $\vec{u}$ un vecteur. Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$, $t_{\vec{u}}(B) = B'$ et $t_{\vec{u}}(C) = C'$ les images de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
<u>But</u> : Montrer que A', B' et C' sont alignés. Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

Au final $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.
Pour des raisons identiques, $AA'C'C$ est un parallélogramme.
Par conséquent $(AC)//(A'C')$ et $(AB)//(A'B')$ et donc puisque $(AB) = (AC)$ on a $(A'B')//(A'C')$, ce qui prouve que A', B' et C' sont alignés.

Propriété 2 :
Par une translation les distances sont conservés

Preuve

Soit A et B deux points quelconques du plan, $\vec{u}$ un vecteur, et $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de ces deux points.
Montrons que $A'B' = AB$
Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

Au final $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.
Par conséquent $AB = A'B'$

Propriété 3 :
L'image par une translation d'une droite est une droite parallèle (éventuellement confondue).

Preuve

Soit une droite (AB). Montrons que l'image de cette droite par la translation de vecteur $\vec{u}$ est une droite parallèle à (AB).
Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de A et B. Soit un point C sur (AB), puisque la translation conserve l'alignement $C' \in (A'B')$.
De plus on a $AA'B'B$ qui est un parallélogramme, et donc $(AB)//(A'B')$.
On vient de montrer que :
- $(AB)//(A'B')$
- Tout point de la droite (AB) a son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ sur $(A'B')$

Pour conclure il faut encore montrer que tout point de la droite $(A'B')$ est l'image d'un point de la droite (AB).
Soit $D' \in (A'B')$ et D le point du plan tel que $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$.
Comme $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$ on a : $t_{\vec{u}}(D) = D'$ et $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$, donc $AA'D'D$ est un parallélogramme. De la même manière $BB'D'D$ est un parallélogramme.
Par conséquent $(AD)//(A'D')$ et $(BD)//(B'D')$. Or $(B'D')$ et $(A'D')$ sont les mêmes droites ce qui prouvent donc que $(AD)//(BD)$ i.e que A B et D sont alignés i.e :

$$D \in (AB)$$

Propriété 4 :
L'image par une translation d'un segment est un segment de même longueur et parallèle.

Preuve
On considère un segment $[AB]$ ainsi qu'un vecteur $\vec{u}$. Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de A et B.
Montrons que $t_{\vec{u}}([AB]) = [A'B']$ puis que $[AB]//[A'B']$.
Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} = \overrightarrow{BB'}$ donc $AA'B'B$ est un parallélogramme, ce qui prouve en particulier que $[AB]//[A'B']$.
Il ne reste plus qu'à prouver que l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
Considérons un point $C \in [AB]$ et $C' = t_{\vec{u}}(C)$ son image par la translation de vecteur $\vec{u}$. De nouveau $AA'C'C$ est un parallélogramme contenu dans le parallélogramme $AA'B'B$ donc $C' \in [A'B']$.
Réciproquement si $D \in [A'B']$ montrons alors que $D \in [AB]$ où D vérifie $t_{\vec{u}}(D) = D' \iff \overrightarrow{DD'} = \vec{u}$. De nouveau, $AA'D'D$ est un parallélogramme contenu dans le parallélogramme $AA'B'B$ et donc $D \in [AB]$

Propriété 5 :
L'image par une translation d'un cercle est un cercle de même rayon.

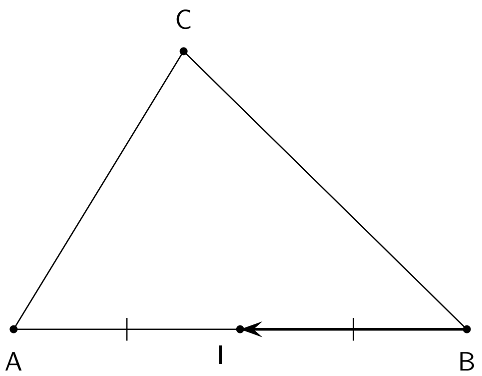
Preuve
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit $O' = t_{\vec{u}}(O)$.
Montrons que l'image de $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O' et de rayon r.
Soit $C \in \mathscr{C}$ et $C' = t_{\vec{u}}(C)$, comme la translation conserve les distance on a $OC = O'C' = r$ et donc $C' \in \mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O' et de rayon r, autrement dit on vient de montrer que tout point du cercle $\mathscr{C}$ a son image sur le cercle $\mathscr{C}'$. Montrons enfin que tout point du cercle $\mathscr{C}'$ « provient »bien d'un point du cercle $\mathscr{C}$
Dans ce cas, considérons $A' \in \mathscr{C}'$ alors $O'A' = r$, soit A le point vérifiant $t_{\vec{u}}(A) = A' \iff \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$. Le quadrilatère $OO'A'A$ est un parallélogramme et donc $OA = O'A' = r$ ce qui prouve que $A \in \mathbb{C}$

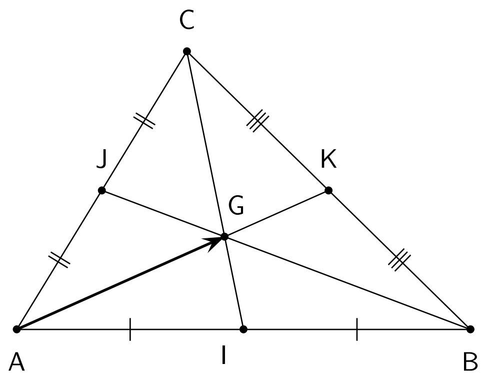
Propriété 6 :
Par une translation, on conserve les angles.

Preuve
On considére un triangle ABC et un vecteur $\vec{u}$. On note $t_{\vec{u}}(A) = A'$, $t_{\vec{u}}(B) = B'$ et $t_{\vec{u}}(C) = C'$ les images par la translation de vecteur $\vec{u}$ des points A, B et C.
Comme la translation conserve les longueurs et comme l'image d'un segment est un segment parallèle, l'image du triangle ABC est le triangle $A'B'C'$ et les deux triangles sont superposables et chacun des angles des deux triangles sont identiques.

Exercice 1.

1. Construire l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$
2. G est le centre de gravité du triangle ABC. Construire l'image de ce triangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.





<u>Exercice</u> 2. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, B' et D' sont les images de B et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

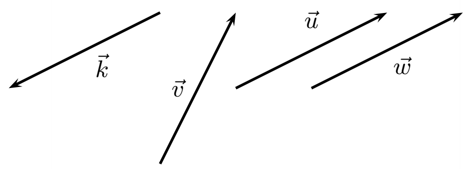
1. Construire les points B' et D'
2. Démontrer que le quadrilatère $BDD'B'$ est un parallélogramme
3. Démontrer que $\mathscr{A}(BDD'B') = 2\mathscr{A}(ABCD)$

II) Les vecteurs du plan

II-1 Caractérisation

Définition 3 :
Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance, deux déplacements de deux points d'originie distincts peuvent correspondre au même vecteur, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. Il est donc possible de le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même.

Ci-contre sont représentés dans le plan $\mathscr{P}$ quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différents car leur direction est différente (elle est portée par deux droites sécantes), les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sont différents car leur sens n'est pas le même. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont identiques car ils ont en commun sens, longueur et direction. On dit qu'ils représentent le même vecteur et on peut écrire $\vec{v} = \vec{w}$



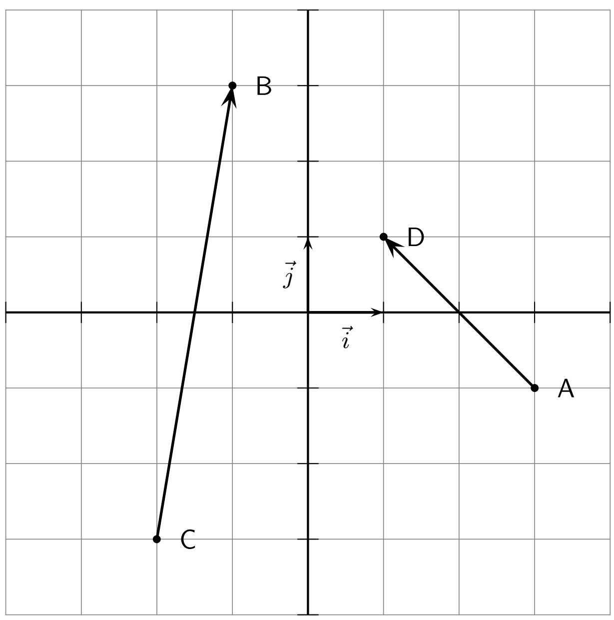
Caractérisation d'un vecteur : Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :
- Sa direction
- Son sens
- Sa longueur

Remarques :
- Un vecteur désigne un déplacement rectiligne, il est indépendant de son point de départ (de son origine)
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$
- Le vecteur nul n'a ni sens, ni direction mais a pour longueur 0.

Définition 4 :
La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$. En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

Exercice 3. Ci-contre sont représentés deux vecteurs.

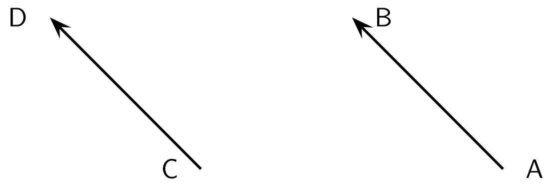
1. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$
2. Calculer la longeur du vecteur $\overrightarrow{CB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}$
4. Comparer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ et le vecteur $\overrightarrow{DA}$
5. Comparer $\vec{i}$ et $\vec{j}$



II-2 Egalité de deux vecteurs et opposés

Propriété 7 :

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallĺogramme.



Attention !

On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

parallélogramme qu'il ne faut pas confondre avec $ABCD$.

Propriété 8 :

Le point K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$$

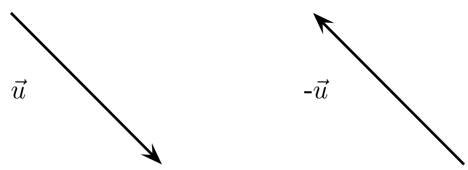
Exercice 4. $ABCD$ et $ABDE$ sont deux parallélogrammes.

1. Donner deux vecteurs

Définition 5 :

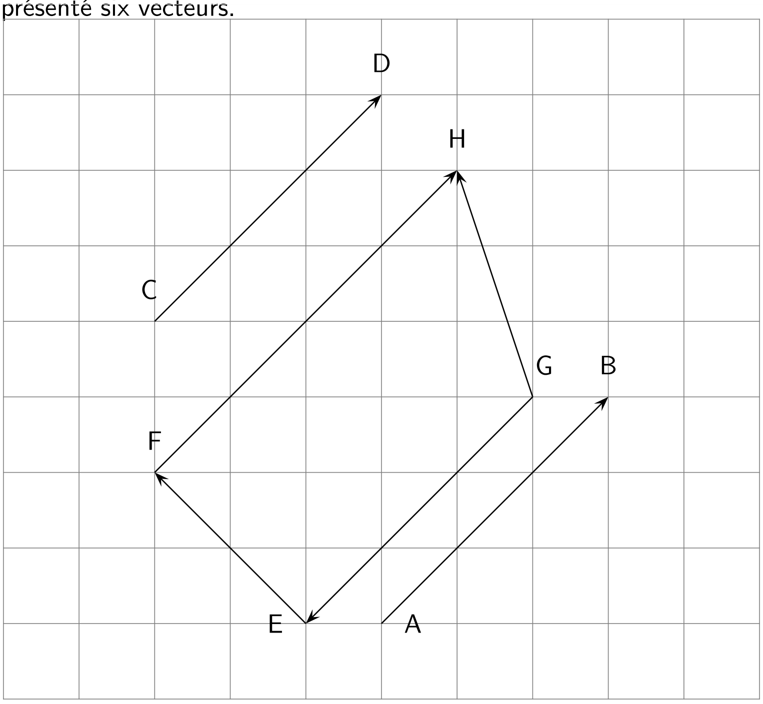
Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont :
- La même direction
- La même norme
- Mais des sens opposés

On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



Exemple :

Sur le dessin on a représenté six vecteurs.



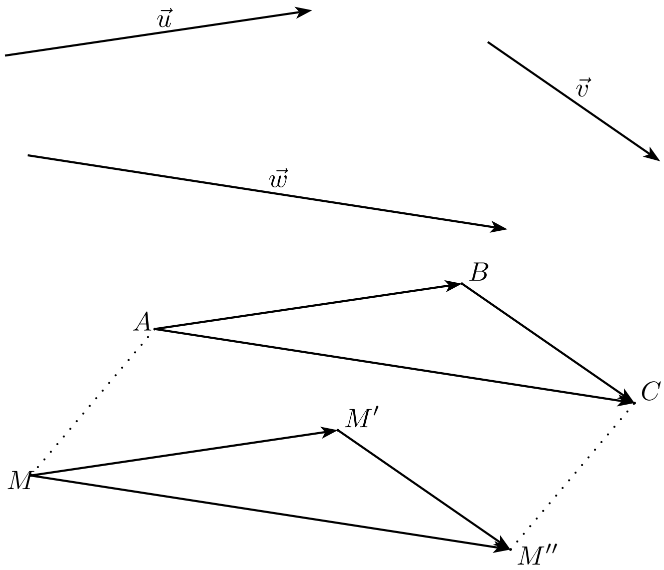
1. Donner les vecteurs égaux, puis les vecteurs opposés.
2. Reproduire chacun des vecteurs avec pour origine le point F

III) Opérations sur les vecteurs

III-1 Somme de deux vecteurs

Propriété 9 :
Appliquer successivement la translation t_1 qui transforme A en B, puis la translation t_2, qui transforme B en C, revient à appliquer la translation t qui transforme A en C.

Preuve
On a représenté sur la figure ci-dessous l'image du point A et du point M par deux translations successives t_1 et t_2 associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on constate que cela revient à effectuer une translation de vecteur $\vec{w}$.

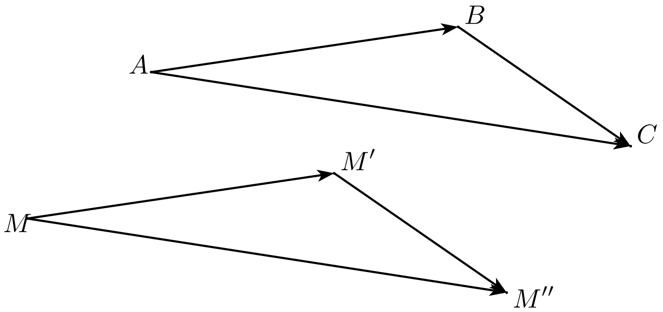


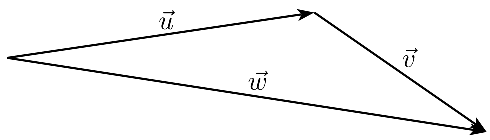
Prouvons le i.e prouvons que le quadrilatère $ACM''M$ est un parallélogramme.
Comme B et M' sont les images de A et M par la translation t_1 alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, ainsi le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme. De même, à l'aide de la translation t_2 on prouve que $BCM''M'$ est un parallélogramme. On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CM''}$$

ce qui prouve que le quadrilatère $AMM''C$ est un parallélogramme.

Remarque : On vient de démontrer que deux translations successives de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ revient à effectuer une translation de vecteur $\vec{w}$, cela pousse à écrire les égalités suivantes :





$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{MM''}$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

Définition 6 :

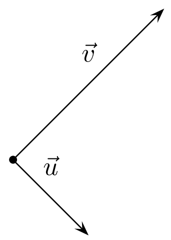
Soient A, B et C trois points.
Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ de la translation t obtenue en appliquant successivement la translation t_1 de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ puis la translation t_2 de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est appelé le vecteur somme des vecteurs $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
On note alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité s'appelle la relation de Chasles.

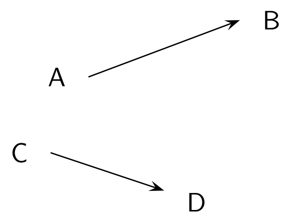
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + (-\overrightarrow{DB}) = \vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$



4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Remarque : Soit A, B et I trois points quelconques du plan, on a alors toujours :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$$

<u>Exercice</u> 5. Simplifier au maximum les relations suivantes :

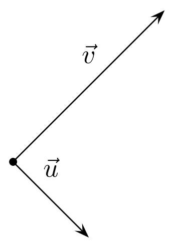
1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$

III-2 Différences de deux vecteurs

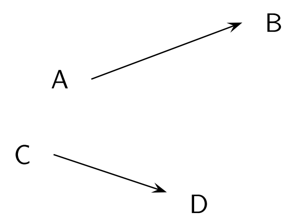
Définition 7 :
La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. On l'obtient en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.

Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$
3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que



$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$

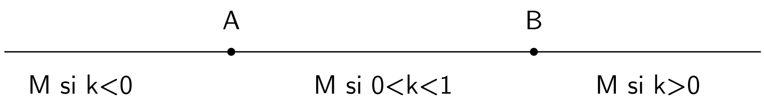
III-3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

III-3.1 Définition

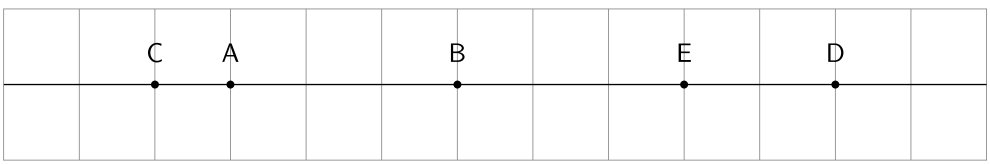
Définition 8 :
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini ainsi :
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
- Si $k>0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens ; si $k<0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés
- Si $k>0$ alors $||k\vec{u}||=k||\vec{u}||$; si $k<0$ alors $||k\vec{u}||=-k||\vec{u}||$, autrement dit $||k\vec{u}||=|k|\times||\vec{u}||$

Par convention : $0\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{0}=\vec{0}$.

Remarque : Soient A et B deux points distincts et k un réel donné. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$ qui se situe sur la droite (AB). Plus précisément : (si $k<0$; si $0<k<1$; si $k>1$)



Exemples :



1. Compléter les égalité vectoriels suivantes :

$$\overrightarrow{CD}=\ldots\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BA}=\ldots\overrightarrow{CA}\ldots\ldots$$

2. Placer les points M, N et K vérifiant $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

III-3.2 Règles de calcul

Propriété 10 :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous nombres réels a et b, on a :
- $a(b\vec{u}) = ab\vec{u}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $a.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples :

$\vec{u}+5.1\vec{u} = 6.1\vec{u}$ $\quad 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\vec{u}+3\vec{v}$ $\quad 2(5\vec{u}) = 10\vec{u}$ $\quad -(4\vec{u}) = (-4)\vec{u} = -4\vec{u}$ $\quad \vec{v} = 4\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{v}$

Application :
Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet.
Démontrer la propriété suivante :

Propriété 11 :
Soit ABC un triangle. Alors le centre de gravité G de ce triangle est l'unique point tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Preuve

- Existence : On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ où A' est le milieu du côté $[BC]$. Alors

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

  Soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallèlogramme. Alors $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AA'}$. Donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3 \times \frac{-2}{3}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$$

  Donc le point G vérifie bien la relation.
- Unicité : Soit M un autre point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
  Alors on a

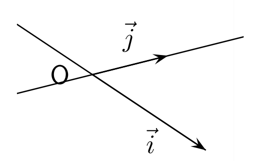
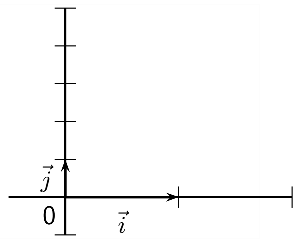
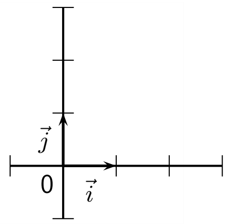
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0}$$

  car G est le centre de gravité du triangle.
  De plus on sait que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, donc on a $3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MG} = \vec{0} \iff M = G$. Donc le point G est unique.

IV) Vecteurs et repérages

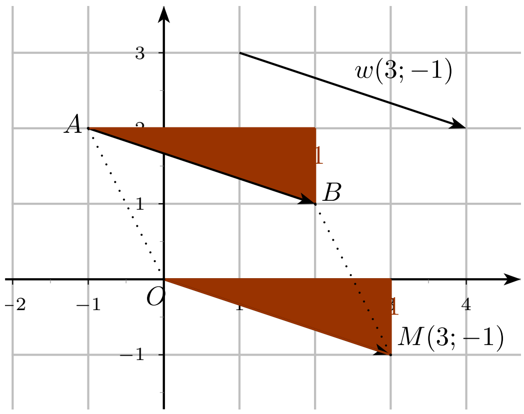
IV-1 Coordonnées d'un vecteurs

Dans tous le paragraphe on considère un repère $(O; I, J)$.
Remarque : Il existe trois types de repère :

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormal
		
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme

Définition 9 :
On considère un vecteur $\vec{u}$, alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Si $M(x; y)$, on note $\vec{u}(x; y)$.

Propriété 12 :
Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.



Propriété 13 :
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Remarque : On admet ce théorème.

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$ on considère les points $A(-3; -1)$, $B(5; -2)$, $C(7; 3)$. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

IV-2 Coordonnées du milieu d'un segment et distance AB

Propriété 14 :

Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $I(x_I;y_I)$ trois points du plan.
I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

Démonstration :

I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
Par conséquent ces deux vecteurs ont mêmes coordonnées, ainsi :

$$\begin{cases} x_I - x_A = x_B - x_I \\ y_I - y_A = y_B - y_I \end{cases} \iff \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

Exercice 7. Si $A(-2;3)$ et $B(4;-2)$, déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Propriété 15 :

Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur dans le repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarque : La démonstration repose sur le théorème de Pythagore, pour pouvoir l'appliquer il est par conséquent indispensable que le repère soit orthonormal.

Corollaire 1 :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercice 8. Soit $A(1;-2)$, $B(4;2)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. Démontrer que B appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $r=5$. Contrôler le résultat sur une figure.

IV-3 Opérations et coordonnées

Propriété 16 :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un nombre réel. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ $\qquad$ $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple :

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-3;1)$, $B(5;2)$ et $C(0;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\dfrac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{OC}\right)$
2. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$

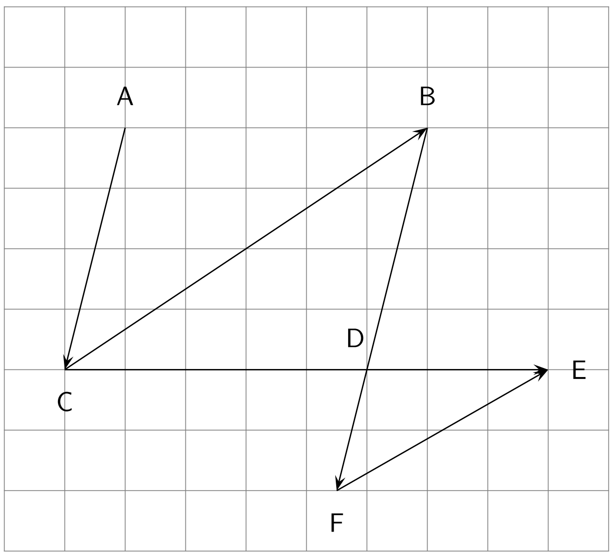
V) Colinéarité

Définition 10 :
Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Théorème 1 :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Preuve
$\Leftarrow$ Trivial de par la définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
$\Rightarrow$ Admis

Exemple :
Citer des vecteurs colinéaires de la figure ci-dessous et traduire par une relation vectorielle :



V-1 Conditions de colinéarité

Remarque : Rappelons que nous avons dit que deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont la même direction. Nous avons aussi vu que les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont colinéaires. Nous admettons la réciproque.
La conjecture suivante peut être énoncée : Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires alors leurs coordonnées sont proportionnels et l'un est égal au produit de l'autre par un réel. La démonstration n'est pas exigible et l'on peut admettre le résultat.
On pourra cependant montrer que si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont proportionnels alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Théorème 2 :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$,
les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que

$$x = kx' \qquad \text{et} \qquad y = ky'$$

Preuve

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Or le vecteur $k\vec{v}$ a pour coordonnées a pour coordonnées $(kx'; ky')$. D'où $\vec{u} = k\vec{v} \Longleftrightarrow x = kx' \quad ; \quad y = ky'$

Exemples :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

V-2 Alignement

Théorème 3 :

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 2 :

Trois points distincts sont alignés ssi deux des vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires.

Preuve

Deux droites parallèles avec un point commun sont confondues.

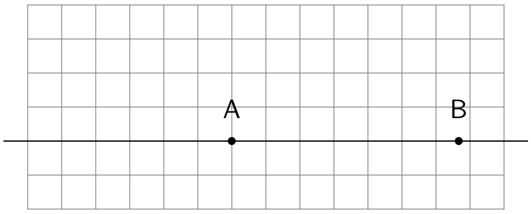
Méthode :

Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple :

Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

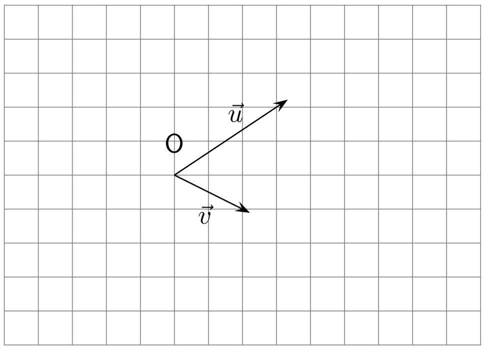
Activité 3



Soient deux points A et B distincts. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$.

1. Placer C le symétrique de A par rapport à B et D le symétrique de C par rapport à A.
   Proposer une expression du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
2. Placer les points M_1 et M_2 de la droite (AB) vérifiant $AM_1 = AM_2 = \frac{1}{2}AB$
   Proposer une expression des vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
3. Placer le point E tel que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.
   Exprimer la distance AE en fonction de la distance AB
4. Placer F et G les points distincts de la droite (AB) tels que $AF = AG = AE$ et $F \in [AB)$.
   Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\vec{i}$.
   Peut-on faire de même avec le vecteur $\overrightarrow{AE}$
5. Placer les points H et K tels que $\overrightarrow{EH} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{2}\vec{i}$

Activité 4



1. Construire les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v}$
2. (a) Construire les points X, Y et Z tels que $\overrightarrow{OX} = -\vec{u} - 2\vec{v}$, $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OZ} = -\frac{2}{3}\vec{u}$
   Que constate-t-on ?
   (b) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2.5(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{OF} = 2.5\vec{u} + 2.5\vec{v}$
   Que constate-t-on ?
   (c) Construire les points G et H tels que $\overrightarrow{OG} = -2(3\vec{v})$ et $\overrightarrow{OH} = -6\vec{v}$
   Que constate-t-on ?