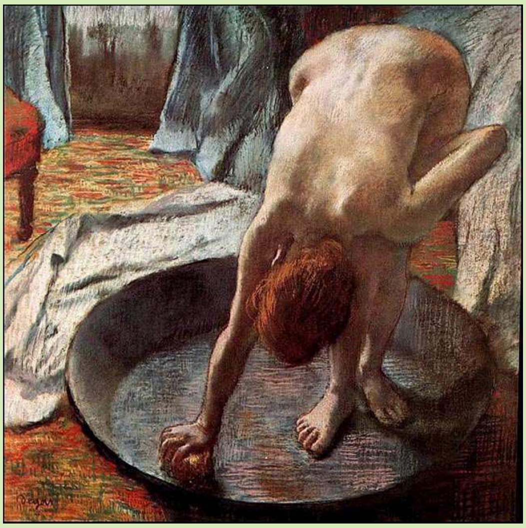
Chapitre 2

Les nombres, équations et inéquations

Hors Sujet



Titre : « Le Tub (1885) »
Auteur : Edgar Degas
Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas, né en 1834 dans le milieu bourgeois et mort en 1917 à Paris, est un peintre français. Il est en général rattaché au mouvement de l'impressionnisme, formé en France à la fin du XIXe siècle en réaction à la peinture académique de l'époque.

En admiration devant les danseuses, la carrière de Degas fut dès le départ influencée par elles. En 1874, Degas commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. C'est à cette époque qu'il commence à explorer certains thèmes nouveaux, comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette. Il multiplie les points de vue audacieux, recherche des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste ». Réalisant des modèles en cire peint au naturel qu'il « accessoirise » ensuite. Un seul de ces modèles fut présenté de son vivant (les autres l'aidant surtout dans ses peintures), en 1881 : La Grande Danseuse. Cette sculpture représente, en grande taille, une jeune danseuse de 14 ans, en cire peinte, agrémentée de cheveux, chaussons et robe de danse. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité juvénile. En effet, avec son visage au front fuyant, sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque par la « science » la petite danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux vieux bourgeois venant la voir ...

D'autres images de Degas ont semé la controverse, et encore aujourd'hui l'œuvre de Degas fait l'objet de nombreux débats auprès des historiens d'art.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
Edgar Degas

Leçon 2

Les nombres, équations et inéquations

Présentation Historique

$\mathbb{R}$ **désigne l'ensemble des nombres que vous connaissez**, comme 2, -684687, $\frac{35}{8}$, π, $-\sqrt{2}$, ... On peut tous les comparer entre eux. Par exemple si je vous donne deux nombres a et b, on est forcément dans l'un des 3 cas suivants : $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. C'est pourquoi l'on dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné.

Aujourd'hui, on connait beaucoup de nombres, que l'on a regroupé par ensemble, en fonction de leurs propriétés, mais il n'en a pas toujours été ainsi.
Les nombres entiers positifs, dont l'ensemble est noté $\mathbb{N}$ et appelé ensemble des entiers ***naturels***, sont connus depuis la préhistoire (leur première trace remonte à $-35\,000$). Les nombres formés du quotient de deux entiers naturels, furent également assez vite découvert, car ils renvoient à la notion de partage.
On manipule les 4 opérations depuis fort longtemps, dont la soustraction. Cependant, on n'a découvert les nombres négatifs que très tard, vers le $VIII^e$ siècle après JC, ie bien après que les nombres dit ***irrationnels*** (ne pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers), tels que $\sqrt{2}$. Cette découverte fut probablement la plus importante de l'algèbre. Elle n'arriva qu'après l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, qui permirent alors à Al Khawarizmi de mettre en place une méthode générale de résolution d'équation, de constater qu'ainsi, une équation n'ayant que des paramètres entier positifs pouvait avoir des solutions qui ne l'étaient pas...

Dans l'antiquité, les mathématiques étaient surtout utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs cultivables, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions ... Les artistes cherchaient les proportions idéales d'un bâtiment, d'une peinture, et même du corps humain ! Ce fût d'ailleurs la découverte du nombre d'or $\Phi \simeq 1,618$, que l'on retrouve dans des oeuvres de Leonard de Vinci ou de l'architecte Le Corbusier. Les mathématiques servaient aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figurait une ou plusieurs quantités inconnues à trouver. Les mathématiciens parlaient de "chose" et tentaient de résoudre leurs problèmes en suivant un discours logique mais parlé, et peu clair pour nous aujourd'hui. De plus, ils ne cherchaient qu'à résoudre leur problème particulier, sans essayer de généraliser une méthode, et devaient recommencer depuis le départ à chaque nouveau problème.

Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des équations du 1^{er} degré et du 2^{nd} degré par des procédes algorithmiques. Les Grecs, vers le V^e siècle avant JC, les résolvaient de façon géométrique. Ce n'est qu'au $VIII^e$ siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prit place peu à peu. Le point de départ fut de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprit l'intérêt d'une telle méthode. C'est Al-Khawarizmi qui le premier s'intéressa à cela : il classifia les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre ce type et pour suivre la méthode générale appropriée, un algorithme donc, menant à la solution.
Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.

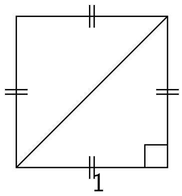
Jusqu'au début du XIX^e siècle, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développèrent la notation symbolique et la conventionnèrent. Par exemple, au XVI^e siècle Viete sépara l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utiliser de nos jours. On catégorisa les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnus, afin de généraliser le plus possible leur résolution d'équations.
Les équations de degré 3 furent résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI^e siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrête là, car le mathématicien français Evariste Galois (1811-1832) montra qu'il était impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

A travers cette recherche, on fut donc contraint de s'intéresser à la nature des nombres, et même d'en introduire de nouveaux (comme les négatifs). Partons donc à la découverte de la classification des nombres, au travers celle des équations ...

Problème d'introduction

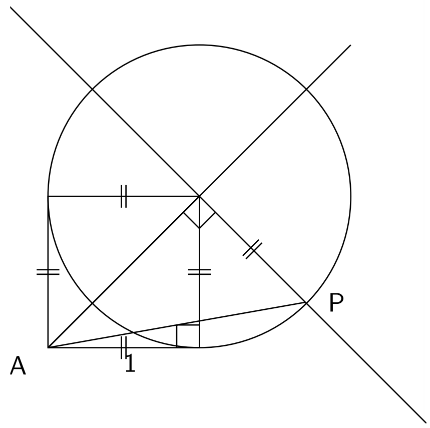
? Question : Construction à la règle et au compas

1. Considérons un carré dont le côté a vaut 1. Calculer la longueur de la diagonale de ce carré.
2. En partant du carré précédent, construire, uniquement à l'aide de la **règle non graduée et du compas**, un segment de longueur $\sqrt{3}$



Solutions :

1. Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore, et on trouve que la longueur ℓ de la diagonale de ce carré vaut :
$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2}$$
2. La distance AP mesure $\sqrt{3}$, on le vérifie de nouveau à l'aide du théorème de Pythagore :
$$AP^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3 \Longleftrightarrow AP = \sqrt{3}$$
Une construction est proposée ci-dessous



I) Utilisation d'expressions algébriques

I-1 Associer à un problème une expression algébrique

Travail de l'élève : Dans un récipient de forme cylindrique et de rayon 4 cm, on verse de l'eau jusqu'à une hauteur de $3,75$ cm. On veut alors placer une bille dans le récipient de façon à ce que le liquide la recouvre exactement. Le problème consiste à déterminer le rayon de la bille.

Définition 1 :

Une **équation** est une égalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs). On désigne ces inconnues par des lettres (x, y, ...)

Point méthode

Pour associer à un problème une équation (ou une expression algébrique) :
- On choisit une inconnue (ou une variable, ou plusieurs) et on détermine l'ensemble auquel elle appartient.
- On traduit les données de l'énoncé en les exprimant en fonction de cette inconnue (ou variable) et on aboutit à une équation, que l'on ne sait pas forcément résoudre (ou une expression algébrique, que l'on peut éventuellement transformer pour répondre au problème posé)

Exercice 1 :

Mettre en équation les problèmes suivants :
- Trouver un nombre tel que son triple augmenté de 8 soit égal à son double diminué de 5.
- Un père a 25 ans de plus que son fils ; dans 5 ans il aura le double de l'âge de son fils. Quel est l'âge du fils ?
- Existe-t-il deux nombres dont la somme est égale à 8 et le produit égal à 5 ?
- Un article augmente de 5%, son nouveau prix est de 8 €. Quel était le prix avant augmentation ?
- Si on ajoute un même nombre au numératuer et au dénominateur de la fraction $\frac{2}{7}$ on obtient $\frac{1}{3}$. Quel est ce nombre ?
- $ABCD$ est un carré de côté 6. Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du triangle AMD soit la moitié de l'aire du trapèze $MBCD$?

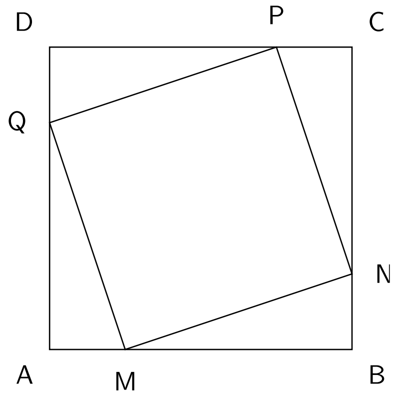
Exercice 2 :

Que penser des affirmations suivantes ? Justifier à l'aide d'expressions algébriques.
- Pour doubler l'aire d'un carré, il suffit de doubler la longueur du côté.
- Si l'on augmente le côté d'un carré de 3 cm, son aire sera augmentée de 9 cm^2.
- $ABCD$ est un carré. Si l'on réduit AB de 1cm et qu'on allonge BC de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu sera égale à celle du carré de départ.
- $NOUK$ est un carré. Si l'on réduit le côté NO de 1cm et qu'on allonge OU de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu aura diminué de 1 cm^2 par rapport à celle du carré de départ.

Exercice 3 :

Soit $ABCD$ un carré et M, N, P et Q les points placés sur les côtés de $ABCD$ tels que $AM = BN = CP = DQ = a$ comme sur la figure ci-contre.
On appelle alors b le nombre tel que $a + b = AB$.

1. En remarquant que MN est la diagonale d'un rectangle de côté a et b, comparer MN et MQ. Que peut-on en déduire sur la nature de $MNPQ$?
2. Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{QMN}$ est droit. Que peut-on en déduire sur la nature de $MNPQ$?
3. Déterminer l'aire de $ABCD$ et celle de AMQ, en fonction de a et b. En déduire l'aire de $MNPQ$ en fonction de a et b.
4. On appelle c la longueur du côté de $MNPQ$. Quelle est alors son aire en fonction de c ?
5. Quel célèbre théorème vient-on de redémontrer ?



I-2 Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

Travail de l'élève : Indiquer à chaque fois parmi les réels a, b et c donnés lesquels sont solutions de l'équation (E) :

(E)	a	b	c
$7 - x^2 = (4-x)(-1+3x)$	1	-1	$\frac{1}{2}$
$2x(3+x) = -\frac{x^3 \times x^2}{8}$	$\frac{2}{3}$	-2	4^{-3}

(E)	a	b	c
$-\frac{10(2+x)}{24} = \frac{5}{3} + x\frac{5}{4} - \frac{5}{2}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\sqrt{5}$
$x\sqrt{6} + 7\frac{\sqrt{4}}{x} = \sqrt{12} + \sqrt{98}$	-2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$

Définition 2 :

Une **solution de l'équation**, c'est une valeur que prend la (ou les) quantités inconnues pour laquelle l'égalité est vérifiée. On note l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{solution1\,, solution2\,, \dots\}$.
Résoudre une équation dans un ensemble de nombres réels I, c'est trouver **tous** les éléments de I pour lesquels l'égalité est vraie.

Point méthode

Pour vérifier qu'un nombre a est solution d'une équation (E), il est inutile de la résoudre :
- On remplace dans (E) l'inconnue (souvent notée x) par le nombre a,
- On compte en n'oubliant pas les règles apprises au collège (rappelées ci-dessous),
- On regarde si l'égalité est vraie. Si oui, alors le nombre a est solution de l'équation (E), sinon non.

Exemples :

2 n'est pas solution de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ car $2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1 \neq 0$
Par contre 3 est solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation car $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$.
On peut en fait démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation ci-dessus dans $\mathbb{R}$ est $\{1; 3\}$

Exercice 4 :

On se propose de résoudre le problème suivant :
« Peut-on trouver un réel positif qui, une fois élevé au cube, a la me valeur que son double augmenté de 1 ? »

1. Mettre le problème en équation.
2. Vérifier que -1 est une solution de l'équation mais pas du problème.
3. Vérifier que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution du problème.

Le nombre ϕ est appelé nombre d'or. On le retrouve en particulier en architecture pour caractériser des proportions harmonieuses.

I-3 Montrer que deux expressions sont égales

Travail de l'élève : Choisir quatre nombres entiers consécutifs.

1. Faire le produit du plus petit et du plus grand de ces entiers.
2. Faire le produit des deux autres nombres.
3. Que remarque-t-on ?
4. Démontrer votre conjecture.

Il arrive qu'en voulant étudier un problème et en testant divers nombres, on conjecture que tous les nombres sont solutions de celui-ci (ce qui revient à dire que le problème est toujours vrai). On est alors souvent ramené à devoir montrer que plusieurs expressions algébriques sont égales.

Point méthode

Pour montrer que deux expressions sont égales, on peut par exemple :
– Développer chacune des expression séparément, puis vérifier que les forme obtenues sont identiques.
– Calculer la différence des deux expressions et montrer qu'elle est égale à 0.

Exemple :

Les expressions $3x^2 + 6x$, $(2x+1)^2 - (x-1)^2$, $3x(x+2)$ et $3[(x+1)^2 - 1]$ sont les mêmes.

Exercice 5 :

– Le carré d'une somme de deux nombres est-il égal à la somme des carrés de ces nombres ?
– L'opposé du produit de deux nombres est-il égale au produit des opposés de ces nombres ?
– La différence des inverses de deux entiers consécutifs non nuls est-il l'inverse de leur produit ?

Exercice 6 :

Voici deux programmes de calcul :

Programme de calcul A
– Prendre un nombre réel
– Retrancher 6
– Elever au carré

Programme de calcul B
– Prendre un nombre réel
– L'élever au carrés
– Retrancher 12 fois le nombre initial
– Ajouter 36

1. Tester ces programmes de calcul, avc un nombre de votre choix, avec -3, $\dfrac{4}{7}$ et avec $\sqrt{5}$.
2. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer votre conjecture.
4. Quel(s) nombre(s) faut-il prendre au départ pour obtenir 9 ? -3 ? 0 ?

Exercice 7 :

Soit les nombres $A = (1 - 2 \times 10^{-8})(1 + 2 \times 10^{-8})$ et $B = (1 - 2 \times 10^{-8}) + (1 + 2 \times 10^{-8})$

1. A l'aide de la calculatrice collège, effectuer en une unique séquence le calcul de A, puis celui de B
2. En posant $x = 2 \times 10^{-8}$ développer et réduire A et B.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.
4. Conclure

Exercice 8 :

1. (a) Calculer sans calculatrice :

$$1\,000^2 - 999^2 \quad ; \quad 1\,001^2 - 1\,000^2 \quad ; \quad 1\,002^2 - 1\,001^2$$

   (b) Que peut-on conjecturer à partir de ces trois résultats ?
2. Pour tout entier positif n, montrer que $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$
3. En déduire que tout nombre impair est une différence de deux carrés consécutifs.
4. Ecrire 199 comme différence de deux carrés.

Remarque : On a par exemple $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ quelque soit le nombre x. On prendra l'habitude de noter :

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\forall$ signifie littéralement pour tout.

I-4 Méthodes de résolution d'équation de bases

I-4.1 Equation produit

Travail de l'élève : Résoudre les équations de la liste suivante :

$(E) : 2x - 5 = 0$
$(E_1) : 3(2x - 5) = 0$
$(E_2) : x(2x - 5) = 0$
$(E_3) : 2x = 5$
$(E_4) : 3x = 5 + x$
$(E_5) : (2x - 5)^2 = 0$
$(E_6) : 4x^2 = 25$
$(E_7) : x^2 = \frac{5}{2}x$
$(E_8) : -\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} = 0$

Déterminer les équations équivalentes à (E).

Définition 3 :

On dit que deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple :

$5(x^2 + 1) = 0 \iff x^2 + 1 = 0.$ Le symbole $\iff$ se lit « équivaut à » ou bien « si et seulement si ».
Mais $5(x^2 + 1) = 0 \not\Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0$ car 0 est solution de la deuxième équation et pas de la première.

Point méthode

Pour résoudre algébriquement une équation, on raisonne par équations équivalentes.
L'objectif est alors de trouver une équation équivalente (ou plusieurs) dans laquelle l'inconnue est isolée dans un membre de l'égalité (l'autre membre étant alors une solution). En particulier on sait déjà que :
- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une égalité
- Multiplier (ou diviser) par un même nombre **non nul** les deux membres d'une égalité

Nous permet d'obtenir des nouvelles équations équivalentes.
On prendra l'habitude de noter en petit sur $\iff$ l'opération effectuée sur les deux membres de l'égalité.

Proposition 1 :

Pour tous nombres a, b et c, avec $a \neq 0$, on a :

$$ax + b = c \quad \overset{-b}{\iff} \quad ax = c - b \quad \overset{\div a}{\iff} \quad x = \frac{c - b}{a}$$

Proposition 2 :

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Soient A et B des expressions : $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

Exemples :

$$\begin{aligned}
5x + 1 = 2x - 9 &\overset{-1}{\iff} 5x = 2x - 10\\
&\overset{-2x}{\iff} 5x - 2x = -10\\
&\iff 3x = -10\\
&\overset{\div 3}{\iff} x = -\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned}
(5x + 1)(2x - 9) = 0 &\iff 5x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 9 = 0\\
&\iff 5x + 1 - 1 = 0 - 1 \quad \text{ou} \quad 2x - 9 + 9\\
&\iff 5x = -1 \quad \text{ou} \quad 2x = 9\\
&\iff \frac{5x}{5} = \frac{-1}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{2} = \frac{9}{2}\\
&\iff x = -\frac{1}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{5} ; \frac{9}{2}\right\}$$

I-4.2 Equation quotient

Définition 4 :

Toute équation du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$) est appelée équation quotient.

Exemple :

$\dfrac{3x-2}{x^2} = 0$ est une équation quotient

Propriété 1 :

Pour tout x n'annulant pas l'expression $Q(x)$, l'équation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$

Exercice 9 :

1. $\dfrac{3x-2}{x^2} = 0$
2. $\dfrac{3x-2}{x-1} = 0$
3. $\dfrac{3x-2}{x^2} = \dfrac{x-5}{x^2}$
4. $\dfrac{(3x-2)(x-1)}{x^2-1} = 0$

I-4.3 Equation de la forme $x^2 = a$

Propriété 2 :

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a :
- Si $a < 0$ alors l'équation n'a pas de solution car un carré est positif. On note $S = \emptyset$
- Si $a = 0$ alors l'équation possède une unique solution qui est 0
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a \iff x^2 - a = 0 \iff (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, donc l'équation possède deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exercice 10 :

1. $x^2 = 4$
2. $x^2 = -2$
3. $(x-3)^2 = 7$
4. $(2x-1)^2 = 0$

II) Découverte des nombres au travers la résolution d'équations

II-1 Les entiers naturels : $\mathbb{N}$

Travail de l'élève :

1. Résoudre les équations suivantes :
$$3-x=1 \qquad \frac{x}{4}=5 \qquad 2x+3=5 \qquad 3x=0 \qquad (x-3)(3x-6)=0$$
2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ?
4. Si on soustrait deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?
5. Si on multiplie deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?
6. Si on divise deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?

Définition 5 :
L'ensemble des nombres entiers naturels se note $\mathbb{N}$ et désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul :
$$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;...\}$$

Remarque : Le $\mathbb{N}$ vient de l'anglais *Natural*.

II-2 Les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Travail de l'élève :

1. Résoudre les équations suivantes :
$$3-x=-5 \qquad -\frac{x}{4}=5 \qquad (2x+3)(x+1)+(2x+3)(x-1)=0$$
$$3x-12=9 \qquad (x-3)(3x-6)=0 \qquad \frac{2x+4}{6x-2}=0 \qquad x^2-1=0$$
2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux entiers relatifs, obtient-on un entier relatif ?
4. Si on soustrait deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?
5. Si on multiplie deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?
6. Si on divise deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?

Définition 6 :
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs.
$$\mathbb{Z}=\{\ldots;-4;-3;-2;0;1;2;3;\ldots\}$$

Remarque : Le $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand *Zahl*.

Propriété 3 :
Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, ou encore que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

II-3 Les quotients d'entiers relatifs ou les rationnels : $\mathbb{Q}$

Travail de l'élève :

1. Résoudre les équations suivantes :

$$3-2x=-5 \qquad -\frac{x}{4}=2 \qquad (2x+3)(x+1)+(2x+3)(3x-7)=0 \qquad \frac{2x+1}{6x-2}=0$$

2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux nombres rationnels, obtient-on un nombre rationnel ?
4. Si on soustrait deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?
5. Si on multiplie deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?
6. Si on divise deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?

Définition 7 :

L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers :

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \text{ où } a\in\mathbb{Z}\, et\, b\in\mathbb{Z}^*\right\}$$

Remarques :
- $b\in\mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.
- Le $\mathbb{Q}$ vient du latin *Quotiente*

Propriété 4 :

Tous les entiers relatifs a peuvent s'écrire $a=\frac{a}{1}$, donc sont des rationnels. On a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est stable pour toutes les opérations. On aurait pu s'arrêter là, cependant, les mathématiciens connaissent d'autres nombres comme π (grâce aux cercles) et $\sqrt{2}$ (grâce au théorème de Pythagore) et il a déjà été démontré que $\sqrt{2}$ ne pouvait pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers (donc encore moins sous la forme d'un entier !). De plus, il restent des équations telles que $x^2-5=0$ dont les solutions ne font pas partie de cet ensemble.

Exemples :

π et $\sqrt{2}$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. On dit qu'ils sont **irrationnels**.

II-4 Les irrationnels et $\mathbb{R}$

Définition 8 :

L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$ et représente l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Géométrique on peut le représenter par une droite graduée. L'abscisse d'un point de la droite est alors un nombre réel. Il contient tous les nombres connus en classe de seconde.

Remarque : Le $\mathbb{R}$ vient de l'anglais *Real*

Propriété 5 :

Tous les nombres rationnels sont réels. On a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Exemples :

Donner tous les ensembles de nombres auxquels appartiennent les nombres suivants :

$$3 \qquad -6 \qquad \frac{4}{3} \qquad -\frac{1}{3} \qquad \pi \qquad \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Remarque : $\mathbb{R}$ n'est encore pas assez grand pour résoudre toutes les équations. Par exemple $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, on note $S = \varnothing$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble vide et ne contient aucun élément.
Cette équation a pourtant une solution dans un ensemble contenant $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{C}$ et appelé l'ensemble des nombres complexes, étudié en classe de terminale S.

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib / a \in \mathbb{R}\,;\, b \in \mathbb{R}\, et\, i^2 = -1\right\}$$

Il a été démontré que $\mathbb{C}$ contenait l'ensemble des solutions des équations construites à partir de cet ensemble.

Exercice 11 :

À quel ensemble appartiennent les nombres décimaux ?

Résumé

L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.

L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Les élémlents de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exercice 12 :

On considère un parallélépipède rectangle de dimension x, x et 16cm. Faire un schéma de la situation. Sachant que son volume V vaut 900cm^3, calculer la longueur x du côté de sa base carré.

Exercice 13 :

Le but de cet exercice est de montrer grâce aux équations que $0,999\,999\cdots = 1$!

1. On considère le nombre rationnel $A = \dfrac{19}{11}$.
   (a) Donner le développement décimal de A avec 8 chiffres significatifs (précision à 10^{-8}).
   (b) A semble-t-il décimal ?
   (c) On dit que A a une écriture périodique. Préciser sa période (nombre entier qui se répète à l'infini dans le développement décimal du nombre).
2. On considère le nombre $x = 0,131313\ldots$
   (a) Montrer que $100x = 13 + x$
   (b) En déduire la valeur de x et sa nature.
3. Par le même raisonnement, déterminer l'écriture fractionnaire du nombre y dont le développement périodique est $y = 0,173173173\ldots$ avec pour période 173 (on note ce genre de nombre ainsi $y = 0,\underline{173}$).
4. En remarquant que le nombre $a = 3,\underline{40}$ peut s'écrire $3 + 0,\underline{40}$, montrer que $a = \dfrac{337}{99}$.
   Il est démontré que, contrairement au nombre irrationnels (tel π ou $\sqrt{2}$), tout nombre rationnel admet un développement périodique.
5. Montrer par le même raisonnement que $0,\underline{9} = 1$

Ce dernier résultat n'est pas une erreur : la notation $0,\underline{9}$ est une autre écriture de 1 !

III) Notion d'ordre et inéquations

III-1 Equilibre et addition

Travail de l'élève :

1. Charlotte et David jouent à « who's the biggest brain »sur Facebook. David est pour l'instant en tête. Donner si possible le vainqueur dans les cas suivant :
   - S'ils gagnent chacun autant de points dans une partie qui suit
   - S'ils perdent autant de points chacun
   - Si David gagne plus de points que Charlotte
   - si Charlotte gagne moins de points que David
2. Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.
   (a) Comparer alors les nombres :
      i. $a + 354$ et $b + 354$
      ii. $a - 84354$ et $b - 84354$
      iii. $45a$ et $45b$
      iv. $-2a$ et $-2b$
      v. $\frac{a}{3}$ et $\frac{b}{3}$
      vi. $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{b}{3}$

   (b) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $a^2 < b^2$ et un tel qu'on ait $a^2 > b^2$
   (c) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ et un tel qu'on ait $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Définition 9 :
Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs). On désigne ces inconnues par des lettres (x, y, ...)

Dans toutes cette partie, a, b, c et d désignent des nombres réels.
Tous les résultats énoncés ici avec des inégalités strictes restent valables (sauf indication contraire) avec des inégalités larges.

Propriété 6 : *Le principe de la balance*
L'ordre est inchangé si :
- On ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une inégalité.
- On ajoute deux à deux les membres d'inégalités de même sens.

Remarque : En fait on a :

$$\begin{aligned} & a < b \\ \overset{+c}{\iff} \quad & a + c < b + c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & a < b \\ \overset{-c}{\iff} \quad & a - c < b - c \end{aligned} \qquad \begin{array}{rc} & a < b \\ + & c < d \\ \hline \Longrightarrow & a + c < b + d \end{array}$$

La « simple »flèche est une **implication** (la réciproque est fausse)

Exemples :

$$\begin{aligned} & 2 < x - 5 \\ \overset{+5}{\iff} \quad & 2 + 5 < x - 5 + 5 \\ \iff \quad & 7 < x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y + 36 < -3 \\ \overset{-36}{\iff} \quad & y + 36 - 36 \leq -3 - 36 \\ \iff \quad & y \leq -39 \end{aligned} \qquad \begin{array}{rc} & x < 3 \\ + & y \leq -2 \\ \hline \Longrightarrow & x + y < 3 + (-2) \\ \iff & x + y < 1 \end{array}$$

Application :

Dans un autre jeu, voici les points accumulés par Charlotte et David :

$$\underbrace{48\,;\,-8\,;\,21\,;\,\frac{15}{7}}_{\text{Charlotte}} \qquad \underbrace{21\,;\,-14\,;\,\frac{7}{6}\,;\,x}_{\text{David}}$$

Charlotte a encore perdu mais il ne se rappelle plus le dernier score x de David. Il cherche à retrouver ce score.
- Est-ce possible ?
- Trouver le plus d'informations possible sur son score

Exercice 14 :

Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 15 :

Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$. Représenter cet ensemble sur une droite graduée.

Exercice 16 :

Soient x et y deux réels.

1. On considère l'algorithme suivant :
   - Entrée : Saisir x et y
   - Traitement :
     - a prend la valeur $(x + y)^2$
     - b prend la valeur $(x^2 + y^2)$
   - Sortie : Afficher $a - b$

   (a) Qu'affiche la machine pour $x = 3$ et $y = 4$? $x = 3$ et $x = -4$? $x = -3$ et $y = -4$?

   (b) Conjecturer le signe $a - b$ suivant les signes de x et y.

   (c) En déduire la comparaison de a et b suivant les signes de x et y.
2. Développer et réduire $(x + y)^2 - (x^2 + y^2)$
3. En déduire la comparaison du carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés

III-2 Equilibre et multiplication

Propriété 7 :

L'ordre est inchangé si :
- On multiplie (ou divise) par un même nombre **positif** les deux membres d'une inégalité.
- On multiplie deux à deux les membres d'inégalités de même sens portant sur des nombres **positifs**.

Par contre, l'ordre est inversé si on multiplie par un même nombre **négatif** les deux membres d'une inégalité.

Remarque : En fait on a :

$$a < b \overset{\times c>0}{\Longleftrightarrow} ac < bc \qquad a < b \overset{\times c<0}{\Longleftrightarrow} ac > bc \qquad \begin{array}{rc} & 0 < a < b \\ \times & 0 < c < d \\ \hline \Longrightarrow & 0 < ac < bd \end{array}$$

Exemples :

1. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Encadrer $3x - 2y$.

On n'a pas de règle pour soustraire des inégalités, on utilisera donc le fait que $3x-2y=3x+(-2y)$.

$$\begin{array}{rc} & 2\leq x\leq 3 \\ \overset{\times 3>0}{\iff} & 6\leq 3x\leq 9\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & -1\leq y<2 \\ \overset{\times(-2)<0}{\iff} & 2\geq -2y>-4 \\ \iff & -4<-2y\leq 2\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & 6\leq 3x\leq 9 \\ + & -4<-2y\leq 2 \\ \hline \implies & 2<3x-2y\leq 11\end{array}$$

2. Soient x et y deux réels tels que $2\leq x\leq 3$ et $1\leq y<4$. Encadrer $\dfrac{xy}{2}$.
On remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

$$\begin{array}{rcc} & 0< & 2\leq x\leq 3 \\ \times & 0< & 1\leq y<4 \\ \hline \implies & 0< & 2<xy<12 \\ \overset{\times\frac{1}{2}>0}{\iff} & 0< & 1<\dfrac{xy}{2}<6\end{array}$$

3. Soient x et y deux réels tels que $2\leq x\leq 3$ et $-5\leq y\leq -1$. Encadrer xy.
On a une inégalité portant sur des négatifs. On doit donc la transformer avant de pouvoir multiplier les inégalités.

$$\begin{array}{rc} & -5\leq y\leq -1 \\ \overset{\times(-1)<0}{\iff} & 5\geq -y\geq 1 \\ \iff & 1\leq -y\leq 5\end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & 0< & 2\leq x\leq 3 \\ \times & 0< & 1\leq -y\leq 5 \\ \hline \implies & 0< & 2\leq -xy\leq 15 \\ \overset{\times(-1)<0}{\iff} & 0> & -2\geq xy\geq -15 \\ \iff & & -15\leq xy\leq -2<0\end{array}$$

4. Soient x et y deux réels tels que $2\leq x\leq 3$ et $-5\leq y\leq 1$. Encadrer xy.
On a une inégalité portant sur des positifs et des négatifs. On va donc commencer par la scinder en deux et traiter les deux cas séparément, puis conclure.

$$\begin{array}{rc} & -5\leq y\leq 0 \\ \overset{\times(-1)>0}{\iff} & 5\geq -y\geq 0 \\ \iff & 0\leq -y\leq 5\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & 2\leq x\leq 3 \\ \times & 0\leq -y\leq 5 \\ \hline \implies & 0\leq -xy\leq 15 \\ \overset{\times(-1)>0}{\iff} & 0\geq xy\geq -15 \\ \iff & -15\leq xy\leq 0\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & 2\leq x\leq 3 \\ \times & 0\leq y\leq 1 \\ \hline \implies & 0\leq xy\leq 3\end{array}$$

Finalement on a : $-15\leq xy\leq 0$ ou $0\leq xy\leq 3$, donc dans tous les cas on a $-15\leq xy\leq 3$.

Attention !

On remarque dans les deux derniers cas, qu'il ne suffit pas de multiplier les bornes de l'encadrement entre elles !

III-3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 10 :

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
L'ensemble des réels x tels que $a\leq x\leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a;b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle $[a;b]$.

Remarques :
- On utilise ces notations pour donner l'ensemble des solutions d'une inéquation.
- On dit qu'un intervalle est borné si et seulement si ses deux bornes sont finies (ie réels).

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a;+\infty[$	Intervalle fermé
		$]a;+\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty;0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Exemples :

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3};\sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5};+\infty\right[$$

3. Ecrire sous forme d'intervalle les solutions des inéquations suivantes :

$$3x-4 \leq 5x+6 \qquad (x-2)(-3x+4) > -3x^2+4x-1$$

« Le dessin n'est pas la forme, il est la manière de voir la forme. »

DEGAS, Edgar