Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

Hors Sujet

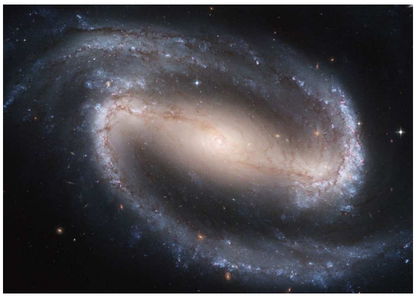
Titre : « Swim »
Auteur : Caribou
Présentation succinte de l'auteur : Depuis ses débuts sous le nom de Manitoba, le canadien Dan Snaith n'en finit plus de sonder en profondeur l'électro-pop. Passé l'expérience Manitoba, Dan s'est accaparé les commandes du groupe Caribou, déjà auteur de deux albums remarquables et dont le dernier exercice, Andorra, avait permis au groupe de véritablement exploser par la force d'un single trompeur, Melody Day. En effet, Caribou n'a jamais cherché à écrire la pop-song parfaite, celle que l'on se prend à fredonner dans la rue, le groupe préférant questionner en permanence la structure lacunaire couplet/refrain d'une chanson pop et montée/descente d'une piste électro. La démarche pop et la dimension psychédélique se font moins évidente que sur Andorra pour davantage se concentrer sur la structure chirurgicale des morceaux. Il y a cette impression tenace de tenir ici l'album ayant réussi l'alchimie parfaite entre les expérimentations audacieuses d'Animal Collective et les comptines électronica de Four Tet. Caribou atteint avec Swim un niveau insoupçonné d'homogénéité et semble parvenir à une sorte de plénitude. Swim se révèle plus sombre, mais jamais plombant, que ses prédécesseurs notamment sur l'électro 80's d'un Leave House chancelant et sur le fantastique Found Out dont les trois minutes d'électro-pop risquent fortement de parasiter durablement vos pensées par la force d'un thème d'une simplicité désarmante. Avec Swim, Caribou signe un brillant album de pop électronique ingénieuse et démontre une fois de plus tout le génie de Dan Snaith. Il n'en reste pas moins que Caribou est un groupe prenant toute sa mesure en live où ses prestations psychédéliques révèlent tout leur pouvoir hypnotique et il y a fort à parier qu'avec ce nouvel album, les prochains concerts vont être sublimés.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 3



Géométrie dans l'espace

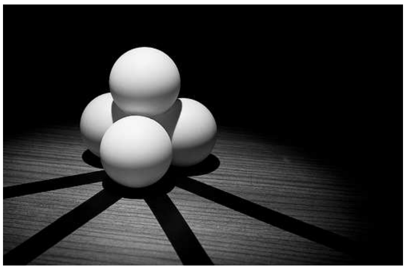
Résumé

Nous allons tenter à travers ce chapitre de nous familiariser avec ce que l'on appelle la dimension 3 : l'espace. Une des plus grandes difficultés sera de parvenir à voir des figures spatiales, alors qu'elles sont tracées sur une feuille (donc dans un plan), c'est-à-dire en dimension 2.
Nous rappellerons quelques règles de perspective cavalière, ainsi que les pièges qu'il faudra éviter.
L'élève curieux peut se demander si on peut aller plus loin dans les dimensions... En effet, durant la scolarité, on ne cesse d'augmenter le nombre de dimension, 1 avec les droites, 2 avec la géométrie plane et 3 avec l'espace. Et bien oui ! On peut définir des espaces de dimension 4, le plus connu étant l'espace-temps. Il devient difficile par contre de représenter de telles géométries...
On peut aussi se demander si la perspective cavalière est la seule manière de représenter l'espace. La réponse est non, en peinture il n'est pas rare de voir une autre manière de représenter l'espace : la perspective parallèle.

Problème d'introduction

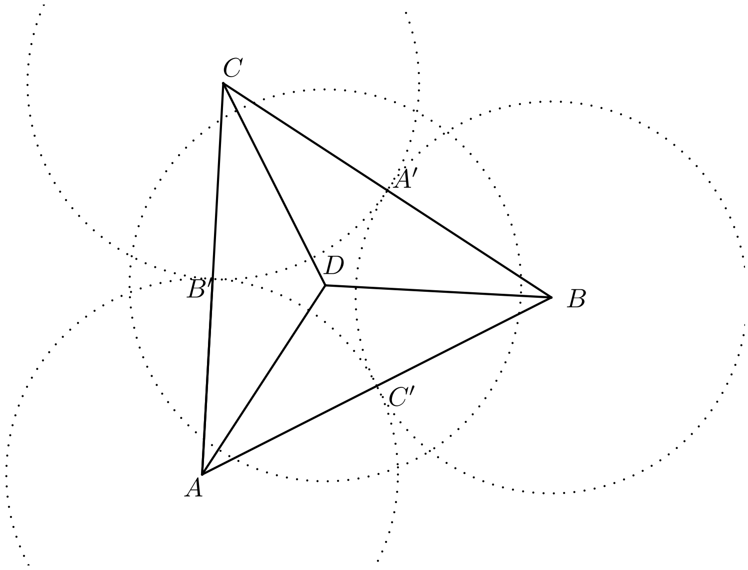
? Question : Une drôle de pyramide

Quatre ballons symétriques de diamètre 20 cm sont disposés de façon à former une pyramide.
Quelle est la hauteur de la pyramide ?



Solutions :

Nommons A, B et C les centres des trois ballons au sol puis appelons D le centre du seul ballon qui n'est pas en contact avec le sol. Représentons la pyramide $ABCD$ vue de dessus :



Dans cette figure les points A', B' et C' sont au milieu des côtés du triangle ABC. Remarquons que :

1. D n'est pas à l'intérieur du triangle ABC, il est au dessus.
2. Le triangle ABC est surélevé de 10 cm par rapport au sol et le point D est à 10 cm du sommet de la pyramide.

Pour déterminer la hauteur h de la pyramide il suffit de calculer la distance d entre le point D et le triangle ABC. En effet, en vertu de la remarque 2, on a :

$$h = d + 20$$

Pour cela on montre que :

1. $ABCD$ est un tétraèdre régulier (i.e chaque face est un triangle équilatéral) de côté 20 cm.
2. $AA' = BB' = CC' = 10\sqrt{3}$ en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle $AA'B$ par exemple.
3. Le projeté orthogonal D' de D sur la face ABC est le centre de gravité du triangle ABC, ce qui montre que
$$AD' = \frac{2}{3}AA' = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$
.
4. dans le triangle ADD', rectangle en D',
$$d = DD' = \frac{20\sqrt{6}}{3}$$
en utilisant le théorème de Pythagore.

Ainsi on conclut que

$$h = \frac{20\sqrt{6}}{3} + 20 \simeq 36,33 \quad cm$$

I) Généralités et représentations de l'espace

I-1 Représentation d'un plan

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.
Un point désigne un endroit précis. On le représente par un point (.) ou une croix ($\times$), et on lui donne un nom. Mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "point", qui n'a pas d'étendue.
Une droite est un ensemble de points, qu'on représente par un "segment", et auquel on donne un nom. il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "droite", qui n'a pas de largeur, et qui est illimité dans les deux sens.
Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan. Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans tous les sens.

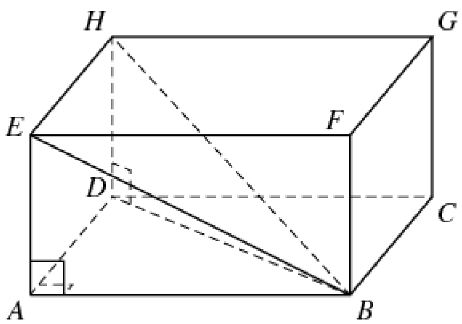
I-2 La perspective cavalière

Dans un représentation en perspective cavalière :

1. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessinés en pointillés.
2. Des points alignés sont représentés par des points alignés.
3. Deux droites de l'espaces parallèles (dans un plan) sont représentées par deux droites parallèles.
4. Des droites concourantes (dans un plan) sont représentées par des droites concourantes.
5. **Attention !** Des droites qui ne sont pas concourantes peuvent aussi être représentées par des droites concourantes.
6. Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
7. Dans un plan de face, une figure est représentée à l'échelle, dans les autres plans, les tailles sont réduites proportionnellement.

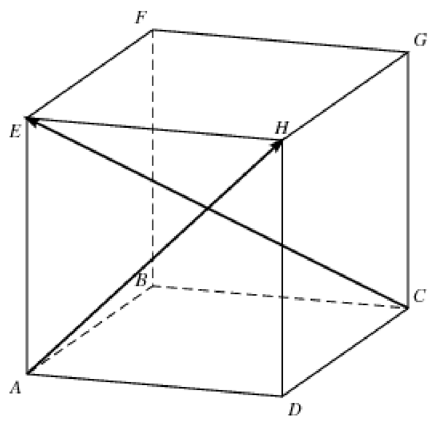
Exemple :

Les segments $[AD]$ est $[DC]$ n'étant pas visibles ont été représentés en pointillés au contraire du segment $[AB]$.
Les droites (AB) est (DC) sont parallèles et sont représentées comme deux droites parallèles.
Notons que deux droites perpendiculaires de l'espace ne sont pas nécessairement représentées comme deux droites perpendiculaires. Mais observez plutôt la figure :



Exemple :

Dans ce deuxième exemple on peut observer que les droites non sécantes (EC) et (AH) se coupent sur le dessin suivant :



Exercice 1 :

Représenter une pyramide à base carrée dans l'espace.

II) Axiomes

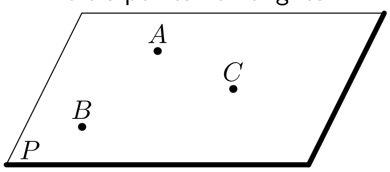
Remarque : En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé axiomatique ou théorie axiomatique. Cette axiomatique doit être non-contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Cette axiomatique définit la théorie ; ce qui signifie que l'axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie, on dit alors que cette théorie est consistante. Un axiome représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique et il peut être choisi arbitrairement. La pertinence d'une théorie dépend de la pertinence de ses axiomes et de son interprétation. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation de la théorie non-contradictoire et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique.

Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

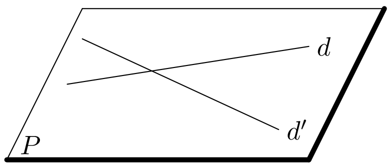
1. Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB).
2. Par trois points non alignés, A, B et C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC).
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

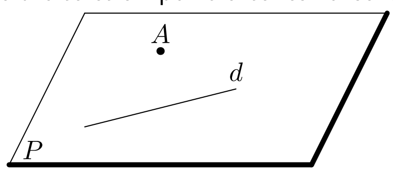
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



III) La géométrie plane utile dans l'espace

III-1 Eléments coplanaires

Propriété 1 :
Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

Définition 1 :
Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

Remarque : Deux ou trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

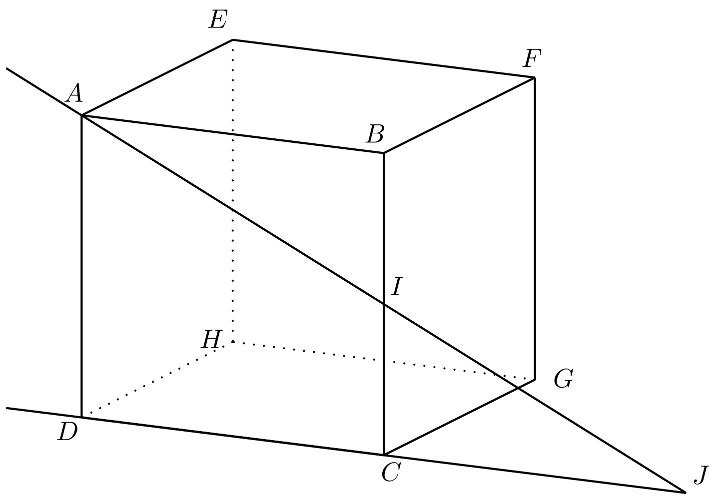
Remarque : Dans un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera donc toujours de se placer dans un plan (que l'on prendra la peine de préciser) pour raisonner.

Exemple :
On a représenté un cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière. I est le milieu de $[BC]$ et J le point d'intersection entre les droites (AI) et (CD). Comme les points A, B et C ne sont pas alignés ils forment un plan, le plan (ABC). D est aussi un point de ce plan, on note alors

$$D \in (ABC)$$

De plus comme le point I est le milieu de $[BC]$, $I \in (ABC)$ et comme $J \in (AI)$, alors $J \in (ABC)$. Les points A, B, C, D, I et J sont coplanaires. En revanche le point H ne fait pas partie de ce plan.
Observons le plan (AFG). Comme (FG) et (AD) sont deux droites parallèles, D est aussi un point de ce plan.
Comme les points D et G appartiennent au plan (AFG) il en va de même de tous les points de la droite (DG). On note dans ce cas :

$$(DG) \subset (AFG)$$



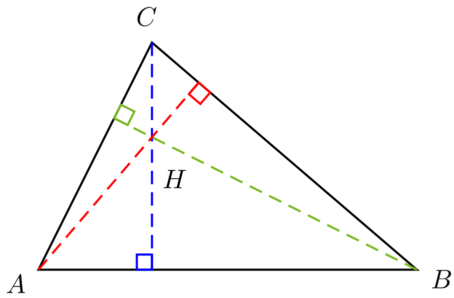
III-2 Formulaire de géométrie plane

III-2.1 Droites remarquables du triangles

Définition 2 :

La <u>hauteur</u> issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé (BC).

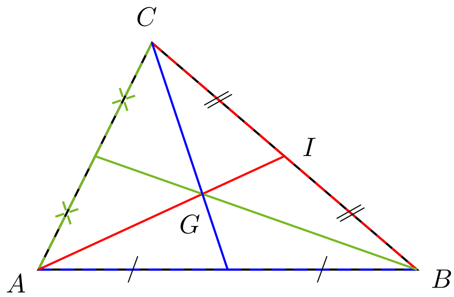
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé <u>l'orthocentre</u> du triangle.



Définition 3 :

La <u>médiane</u> issue du sommet A est la droite passant par A et par le milieu I du côté opposé $[BC]$.

Les trois médianes sont concourantes en un point G qui est le <u>centre de gravité</u> du triangle.

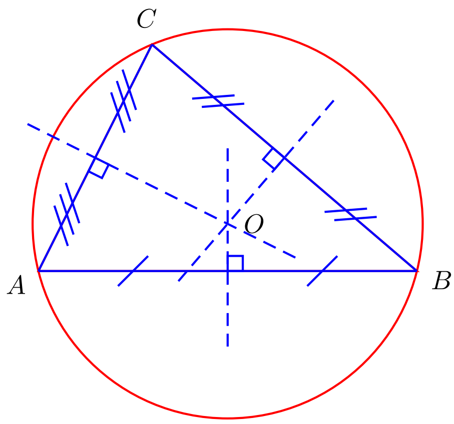


Remarque : G se trouve aux deux tiers de la médiane $[AI]$ en partant de A : $AG = \dfrac{2}{3}AI$.

Définition 4 :

La <u>médiatrice</u> du segment $[AB]$ est la droite coupant ce segment perpendiculairement en son milieu.

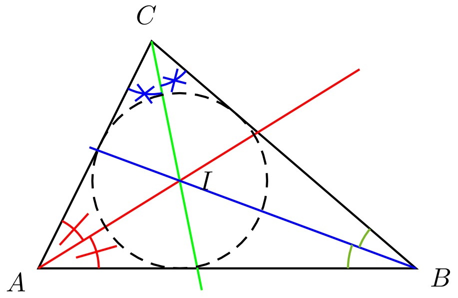
C'est aussi l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B.
Les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est le <u>centre du cercle circonscrit</u> à ce triangle.



Définition 5 :

La <u>bissectrice</u> d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Les trois bissectrices sont concourantes en un point I qui est le <u>centre du cercle inscrit</u> dans le triangle.

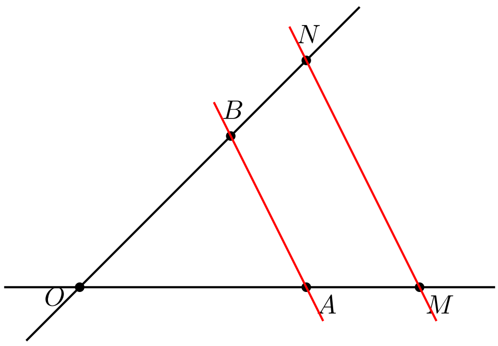


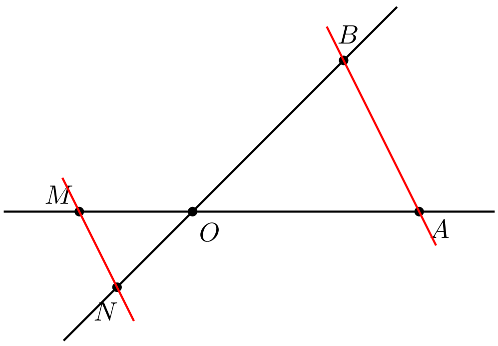
III-2.2 Les grands théorèmes

Théorème 1 : *de Thalès :* -627 *et* -547

O, A, B sont trois points du plan, M et N appartiennent respectivement aux droites (OA) et (OB).

- Si les droites (AB) et (MN) sont parallèles alors $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.
- Si $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$ et si les points O, A, M et O, B, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

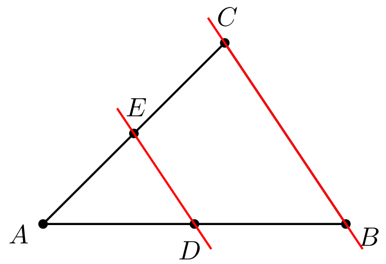




Théorème 2 : *des milieux*

On se place dans un triangle quelconque.

- La droite passant par les milieux de deux des côtés est parallèle au troisième côté
- Si une droite passe par le milieu d'un premier côté et est parallèle au second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

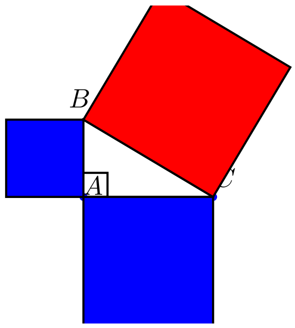


on a : D milieu de $[AB]$
E milieu de $[AC]$

alors : $(DE) \parallel (BC)$
et $DE = \frac{1}{2}BC$

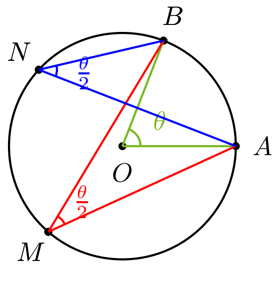
Théorème 3 : *de Pythagore :* -580, -500

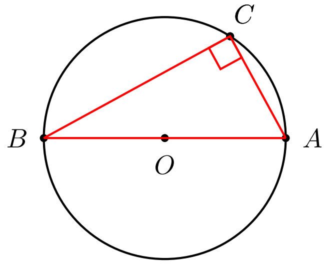
Soient A, B et C trois points du plan :
le triangle ABC est rectangle en A équivaut à dire que $AC^2 + AB^2 = BC^2$.



Théorème 4 :

Soient A et B deux points d'un cercle de centre O.
Pour tout point M de ce cercle, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ est égale à la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.





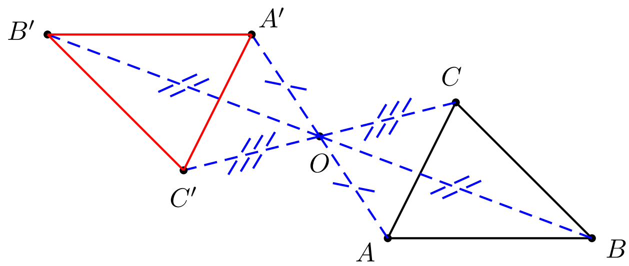
Conséquences :

- Si M et N sont deux points du cercle de centre O alors $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$,
- Si le triangle ABC est rectangle en C alors il est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$
- Si le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ alors il est rectangle en A ?

III-2.3 Transformations

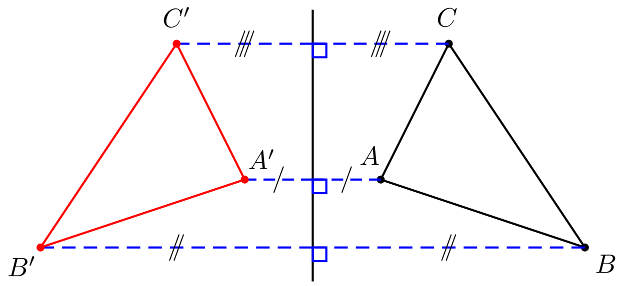
Définition 6 :
M' est l'image du point M par la symétrie de centre O signifie que O est le milieu de $[MM']$.

La symétrie centrale conserve les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et orientés, les formes et les figures.



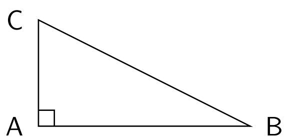
Définition 7 :
M' est l'image du point M par la symétrie d'axe Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

La symétrie axiale conserve les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, les formes et les figures.
Par contre, elle inverse les angles orientés.



III-2.4 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, on a les relations trigonométriques suivantes :



- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

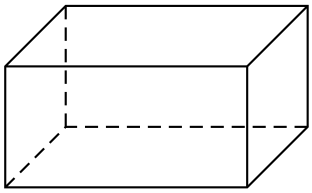
Exemples :

$\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$

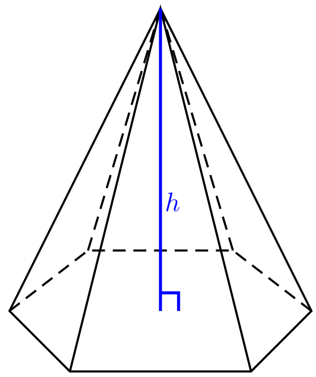
Utilisations :
- Pour calculer la longueur d'un côté.
- Pour calculer la mesure d'un angle.

IV) Volumes de l'espace

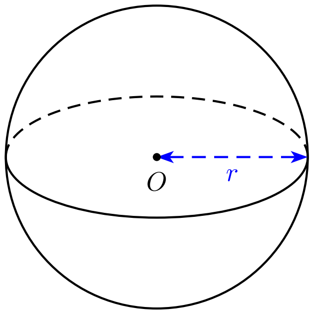
Parallélpipède rectangle : $V = L \times l \times$ h.



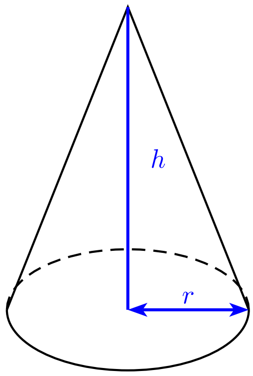
pyramide : $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{h}}{3}$.



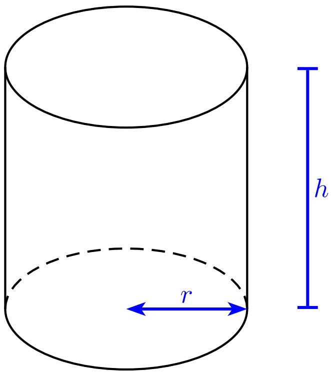
Sphère : V$= \dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3$



Cône de révolution : $V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.



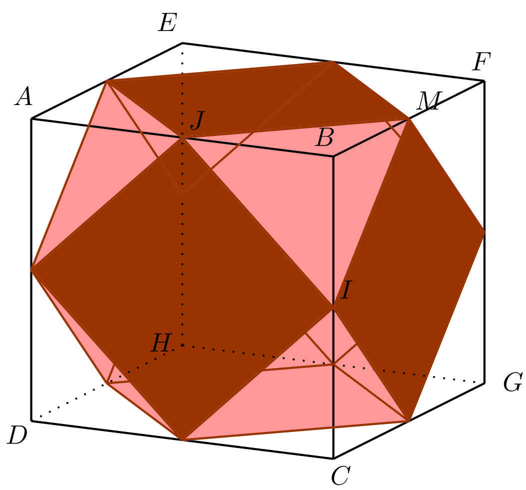
Cylindre de révolution : $V = \pi \times r^2 \times h$.



Exercice 2 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 4 cm. Soit I, J et M les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[BF]$.

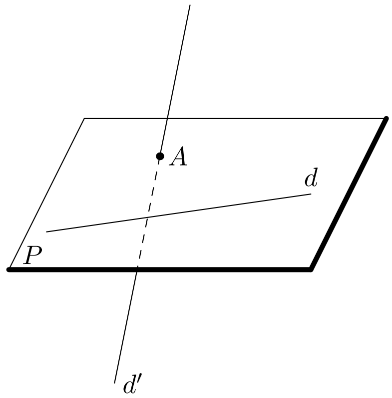
1. Quelle est la nature du triangle IJM ? Le représenter en vraie grandeur.
2. Calculer le volume du tétraèdre $BIJM$.
3. On enlève les huit « coins »du cube pour obtenir le solide représenté ci-contre, appelé « cuboctaèdre ».
   (a) Combien de faces ce solide comporte-t-il ? Quelle est la nature de ces faces ?
   (b) Calculer le volume exact de ce cuboctaèdre, puis en donner une valeur approchée au centimètre cube près.



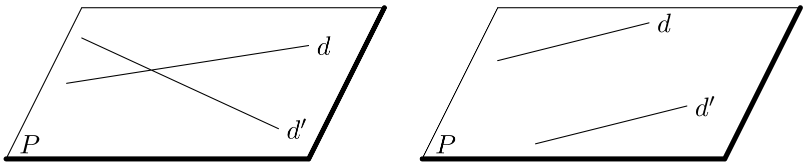
V) Positions relatives de droites et plans

V-1 Positions relatives

1. d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :
   (a) il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,

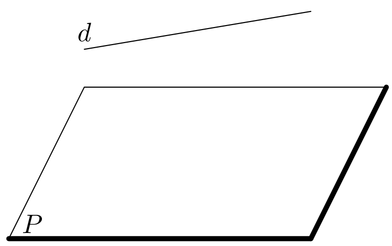


   (b) il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).

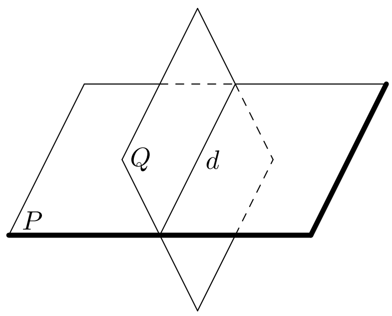


deux droites sécantes deux droites parallèles

2. d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :
   (a) la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants (voir la figure précédente),
   (b) la droite est incluse dans le plan,
   (c) la droite et le plan n'ont aucun point commun.

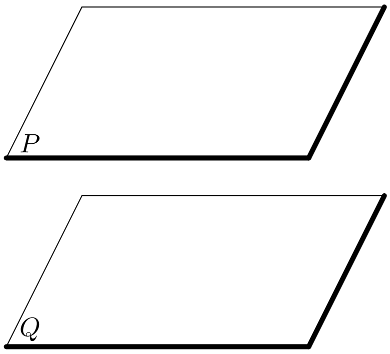


3. P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :
   (a) les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



(b) les plans sont confondus,

(c) ils n'ont aucun point commun.

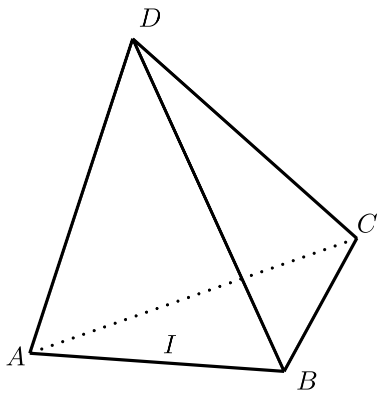


Exercice 3 :

$ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu du segment $[AB]$.
Compléter les phrases mathématiques suivantes à l'aide des symboles

$$\subset, \quad \in, \quad \notin, \quad \not\subset$$

1. $I \ldots (AB)$
2. $B \ldots (CDI)$
3. $(CI) \ldots (ABC)$
4. $D \ldots (BI)$
5. $(AB) \ldots (CBA)$
6. $(DI) \ldots (BCI)$
7. $B \ldots (ADI)$
8. $B \ldots (IA)$



Exercice 4 :

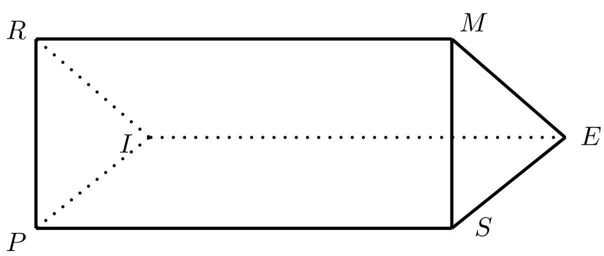
$ABCD$ est un tétraèdre. Démontrer que (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires en raisonnant par l'absurde. [a]

a. On supposera que (AB) et (CD) sont coplanaires afin d'aboutir à une contradiction.

Exercice 5 :

PRISME est un prisme droit à base triangulaire. Déterminer les positions relatives :

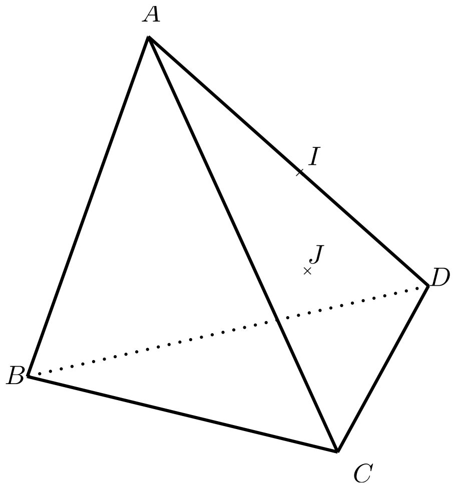
1. des droites (RE) et (MI).
2. des droites (PI) et (EM).
3. de la droite (EM) et du plan (IPS).
4. de la droite (SR) et du plan (PMR).
5. du plan (IRP) et du plan (IEM).



V-2 Application : section d'un solide par un plan

Exercice 6 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[AD]$. Le point J est sur la face ACD tel que (IJ) ne soit pas parallèle à (AC).
Tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB).



Remarque : Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Solutions :

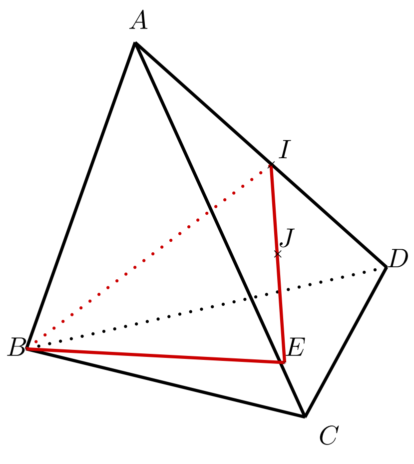
I et J sont deux points du plan (ACD), par conséquent :

$$(IJ) \subset (ACD)$$

. Comme $B \notin (ACD)$ les plans (IJB) et (ACD) ne sont pas confondus, comme I est commun aux deux plans, leur intersection est une droite : il s'agit de la droite

$$(IJ)$$

La trace du plan (IJB) sur la face ACD est donc le segment $[IE]$ (où E est le point d'intersection des droites (IJ) et (AC), tracée ci-dessous en rouge.
On démontre de la même manière que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BE]$, puis que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BI]$.
Ainsi la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB) est le triangle BIE, en rouge sur le schéma suivant :



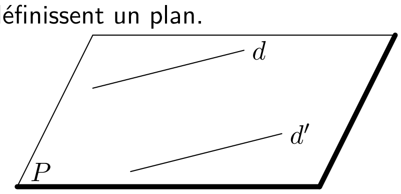
VI) Parallélisme dans l'espace

La liste des propriétés n'est pas exhaustive. . .certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

VI-1 Définitions

Définition 8 :
- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes. Il en est ainsi de deux droites confondues ou bien coplanaires et sans point commun.
- Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi de deux plans confondus ou sans point commun.
- Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne pas sécants. Il en est ainsi d'une droite incluse dans un plan ou d'une droite et d'un plan sans point commun.

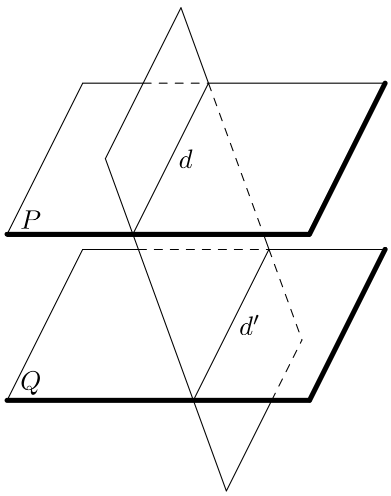
Remarque :
- Le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure, dans l'espace, qu'elles sont parallèles.
- Deux droites strictement parallèles définissent un plan.



VI-2 Parallélisme entre droites

Théorème 5 :
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

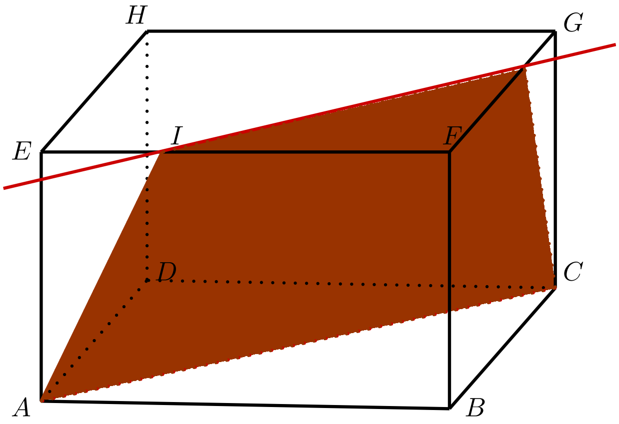
Théorème 6 :
Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.



Exercice 7 **:**
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit I un point de $[EF]$. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

Solutions :

Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces $ABCD$ et $AFGH$ du pavé, sont parallèles.
$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC).
On a donc $(ABC)//(EFG)$ et $(ACI) \cap (ABC) = (AC)$. On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.

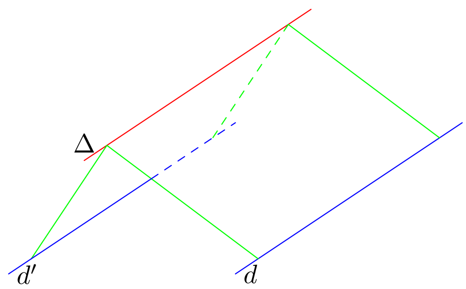


Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole $\cap$. Ainsi si la droite d est l'intersection des plans P et Q, on note :

$$d = P \cap Q$$

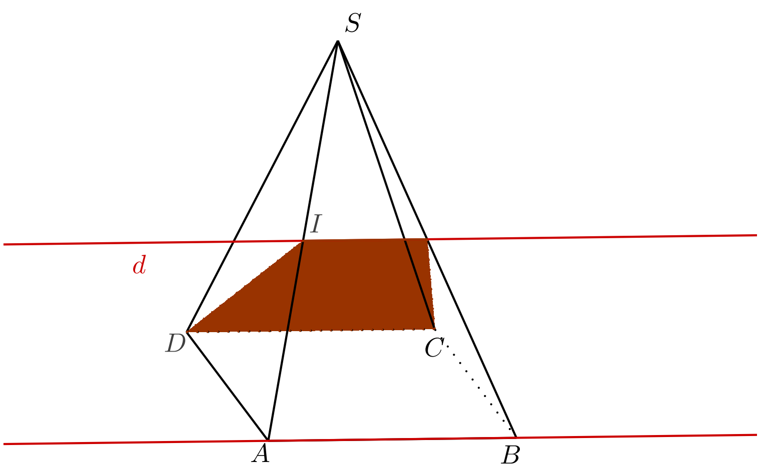
Théorème 7 : *Théorème du toit*

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'.
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



Exercice 8 :

Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête $[SA]$. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d.
Démontrer que d est parallèle à (AB).

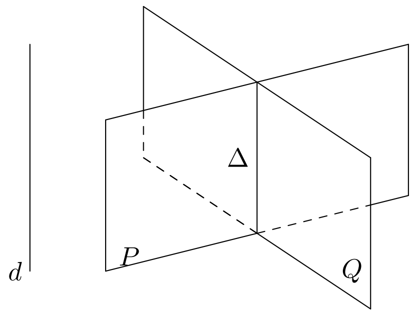


Solutions :

Les plans (CDI) et (SAB) sont sécants selon la droite d. Or le plan (CDI) contient la droite (CD) et le plan (SAB) contient la droite (AB), et les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (comme supports des côtés du carré de base de la pyramide). D'après le théorème du toit, la droite d est donc parallèle à la droite (AB).

Corollaire 1 :

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.



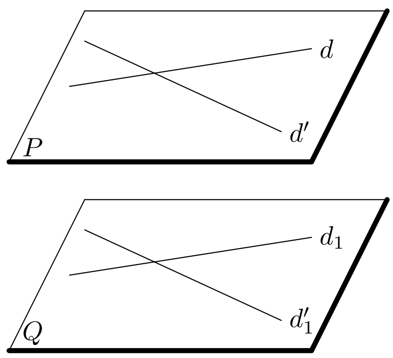
VI-3 Parallélisme entre plans

Théorème 8 :

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 9 :

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.



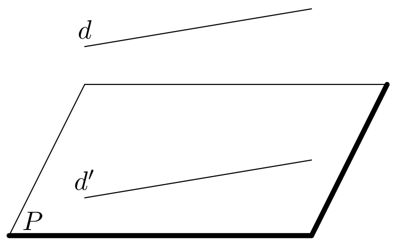
Exercice 9 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[BD]$. Démontrer que $(IJK)//(ACD)$.

VI-4 Parallélisme entre droites et plans

Théorème 10 :

Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.

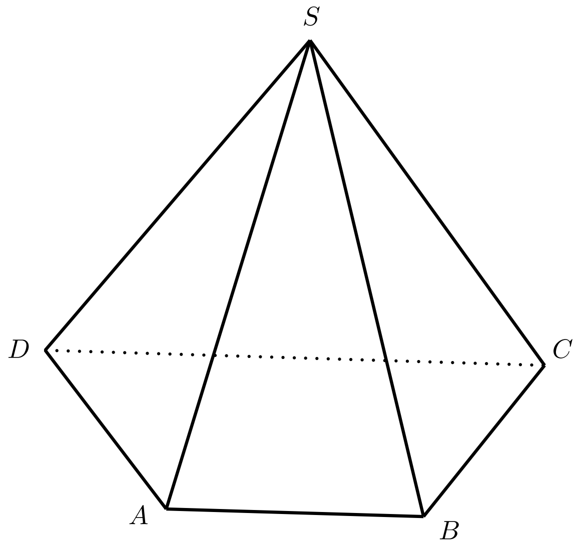


Exercice 10 :

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

Exercice 10 :

Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze : les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles. Or les points A et B appartiennent au plan (SAB) : on a donc $(AB) \subset (SAB)$. Puisque la droite (CD) est parallèle à une droite du plan (SAB), on peut affirmer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).



VII) Quelques exercices d'applications

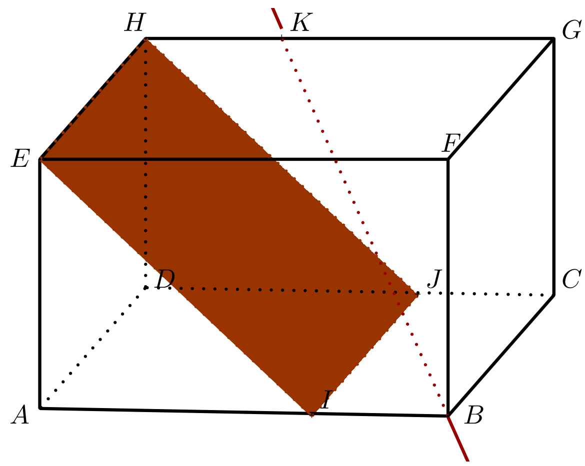
VII-1 Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Exercice 11 :

Dans un pavé droit $ABCDEFGH$, on place les points I, J et K respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[CD]$ et $[GH]$ tels que :

$$BC = CJ = HK$$

1. De quelle nature est le quadrilatère $IBKH$?
2. Que peut-on dire des droites (BK) et (IH) ?
3. En déduire que la droite (BK) est parallèle au plan (HIJ).



Solutions :

1. Comme $HK = IB$ et comme $(HK)//(IB)$ le quadrilatère $IBKH$ a deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.
2. $IBKH$ est un parallélogramme, donc $(KB)//(IH)$.
3. (KB) est parallèle à une droite du plan (HIJ), elle est donc parallèle au plan (HIJ).

Exercice 12 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I et J les points situés respectivement sur $[AB]$ et sur $[AH]$ tels que :

$$AI = \frac{1}{4}AB \qquad \text{et} \qquad AJ = \frac{1}{4}AH$$

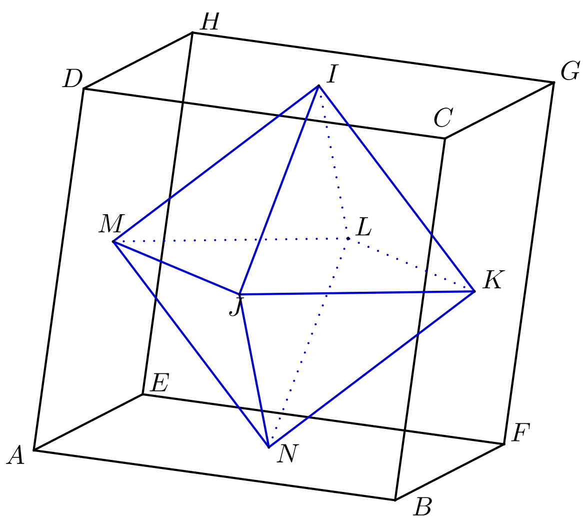
Démontrer que $(IJ)//(BFH)$

VII-2 Démontrer que des plans sont parallèles.

Exercice 13 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Soit I, J, K, L, M et N les centres respectifs des face du cube (voir ci-dessous). Le solide $IJKLMN$ est un octaèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). On veut démontrer que les faces opposées de l'octaèdre sont parallèles.

1. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (HC).
2. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (MN).
3. Démontrer que les plans (IKL) et $JMN)$ sont parallèles.



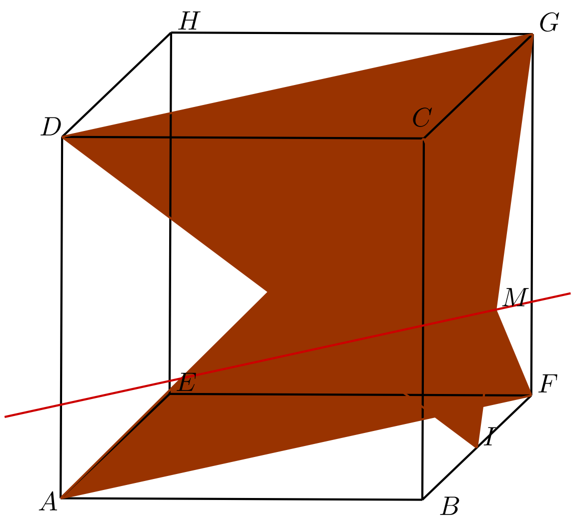
Solutions :

1. Dans le triangle HFC : I est le milieu de $[HF]$ et K celui de $[FC]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(IK)//(HC)$.
2. Dans le triangle AHC : N est le milieu de $[AC]$ et M celui de $[AH]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(MN)//(HC)$. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Donc $(IK)//(MN)$.
3. De la même manière, on démontre que (JN) et (IL) sont parallèles. Ainsi, dans le plan (IKL), se trouvent deux droites sécantes, qui sont respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (JMN) : on en déduit que les plans (IJK) et (JMN) sont parallèles.
Ce résultat reste vrai pour toute paire de faces opposées de l'octaèdre.

VII-3 Déterminer l'intersection de deux plans

Exercice 14 :

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de l'arête $[BF]$.
Déterminer et tracer l'intersection des plans (AFC) et (DIG).



Solutions :

On commence par chercher un point commun aux deux plans.
La droite (GI) est contenu dans les plans (DIG) et (BFG). De même la droite (CF) est contenu dans les plans (AFC) et (BFG). Par conséquent (CF) et (GI) sont sécantes, en un point que l'on appelera M (elles ne peuvent en aucun cas être parallèles).
Il est difficile, ici, de trouver un deuxième point commun. En revanche on remarque que $(DG)//(AF)$ car ses droites portent les diagonales de deux faces opposées du cube.
Or $(DG) \subset (DIG)$ et $(AF) \subset (AFC)$, d'après le théorème du toit, on en conclut que la droite d'intersection des plans (DIG) et (AFC) est parallèle aux deux droites (DG) et (AF).
On peut ainsi tracer la droite recherchée : c'est la droite passant par le point M et parallèle aux droites (DG) et (AF).

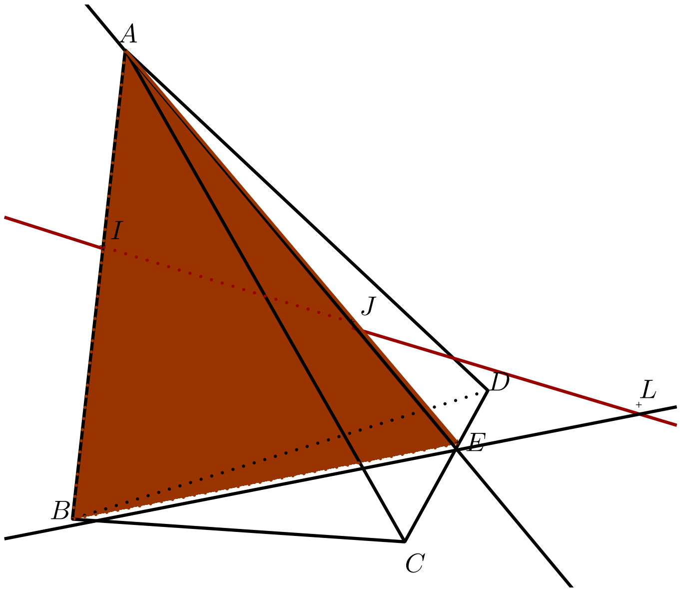
Exercice 15 :

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze avec $(AB)//(CD)$. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD), puis des plans (SAB) et (SCD).

VII-4 Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 16 :

Soit $aBCD$ un tétraèdre. I est un point de l'arête $[AB]$. J est un point de la face ACD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



Solutions :

On cherche un plan auxiliaire, contenant la droite (IJ) et coupant le plan (BCD) ; ici le plan (AIJ) convient.
La droite (IJ) n'est pas contenu dans le plan (BCD) et n'est pas parallèle au plan (BCD) donc elle est sécante au plan (BCD).
La droite (AJ) coupe la droite (CD) en un point qu'on appelle E (on observe ici la face ACD).
Les droites (IJ) et (BE) sont toute entière contenu dans le plan (AIJ) et comme (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD), la droite (IJ) est sécante avec la droite (BE). Notons L l'intersection de (BE) et (IJ). L est alors le point cherché.

VIII) Informatique

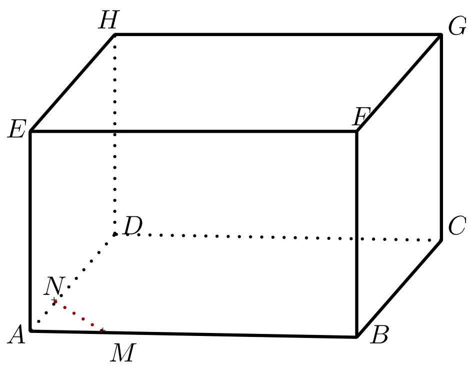
VIII-1 TP : Géogébra

Exercice 17 :

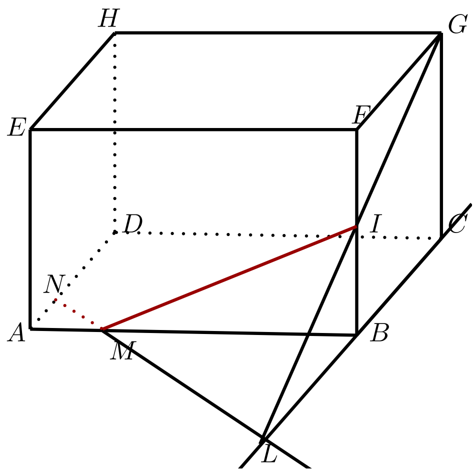
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes $[AD]$ et $[AB]$. Tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Voici les différentes étapes :

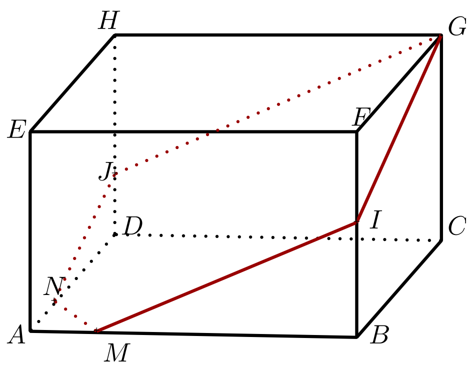
1. **Trace du plan (MNG) sur la face $ABCD$**
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face $ABCD$ est donc le segment $[MN]$. (en pointillés rouge sur la figure).



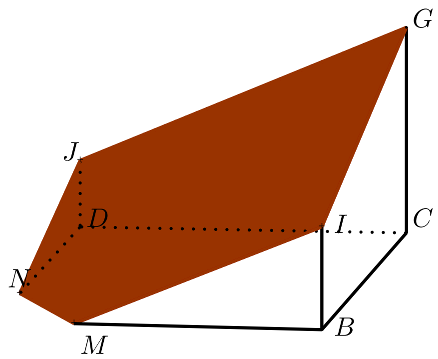
2. **Trace du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   $(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et $(BCG$. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments $[GI]$ et $[MI]$ sont les traces du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$ respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).



3. **Traces du plan (MNG) sur les faces $CGHD$ et $ADHE$**
   Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).
   $N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.
   De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH).
   On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.
   Cette droite coupe l'arête $[DH]$ en un point J : les segments $[NJ]$ et $[JG]$ sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces $ADHE$ et $CGHD$ respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).



4. **Section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MGN).**
   La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone $MIGJN$.



VIII-2 Algorithme

Exercice 18 :

On a écrit un algorithme à l'aide du logiciel Algobox. Voici ce qui a été saisi :

```
VARIABLES
  Rayon EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  Volume EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer le rayon"
  LIRE Rayon
  AFFICHER "Entrer la hauteur"
  LIRE Hauteur
  Volume PREND_LA_VALEUR Math.PI*pow(Rayon,2)*Hauteur/3
  AFFICHER "Le Volume est égal à "
  AFFICHER Volume
FIN_ALGORITHME
```

1. Que fait cet algorithme ?
2. Quelles sont les variables en entrée ?
3. Quelles sont les variables en sortie ?

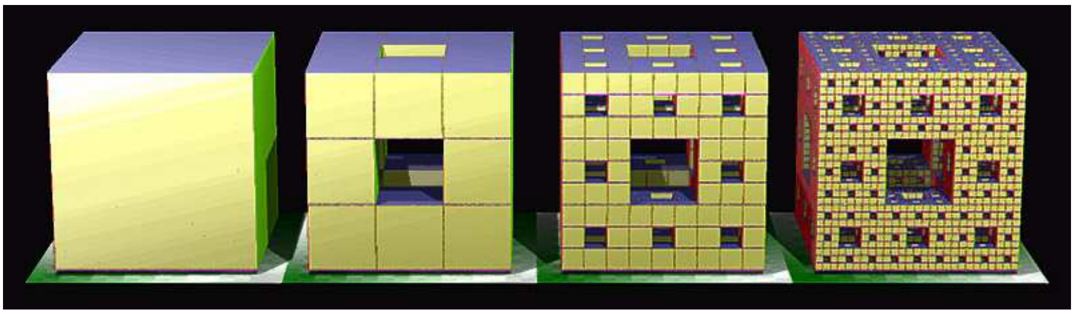
Exercice 19 :

En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme affiachant :

1. Le volume d'une boule lorsque l'on saisit le rayon ;
2. L'aire latérale totale d'un cylindre de révolution lorsque l'on saisit le rayon du disque de base et la hauteur.

Exercice 20 : L'éponge de Menger

1. L'éponge de Menger est un objet mathématique que l'on fabrique en suivant la recette ci-dessous :
   (a) On part d'un cube de 1 m d'arête.
   On découpe ce cube en 27 petits cubes identiques, puis on enlève le cube central et les cubes situés au centre de chacune des faces (soit 7 cubes au total). Combien de cubes reste-t-il ? Combien mesure leur arête ? Quel est le volume du solide ainsi obtenu après cette première étape ?
   (b) On répète l'étape 1 pour chacun des cubes restants. Combien de cubes reste-t-il ? Combien mesure leur arête ? Quel est le volume du solide ainsi obtenu après cette deuxième étape ?
   (c) On répète l'étape 1 pour chacun des cubes restants. Combien de cubes reste-t-il ? Combien mesure leur arête ? Quel est le volume du solide ainsi obtenu après cette troisième étape ?
   On peut continuer ainsi sur un nombre quelconque d'étapes ... Voici les représentations du cube de départ et de l'éponge de Menger après les (a), (b) et (c).



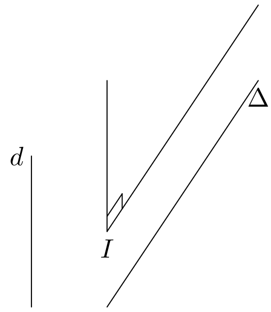
2. Voici un algorithme. Que fait-il ?

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  V EST_DU_TYPE NOMBRE
  K EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  C PREND_LA_VALEUR 1
  A PREND_LA_VALEUR 1
  AFFICHER "Nombres d'étapes :"
  LIRE N
  POUR K ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    C PREND_LA_VALEUR 20*C
    A PREND_LA_VALEUR A/3
    V PREND_LA_VALEUR C*pow(A,3)
    FIN_POUR
  AFFICHER V
FIN_ALGORITHME
```

3. Programmer cet algorithme et déterminer le volume de l'éponge de Menger après 5, 10 et 20 étapes. Que pensez-vous des résultats obtenus ?

IX) Orthogonalité dans l'espace (Hors-Programme)

Définition 9 :
Deux droites d et Δ (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites menées par un point I quelconque sont perpendiculaires. (Nous admettrons alors que les parallèles à d et Δ passant par n'importe quel autre point sont également perpendiculaires)



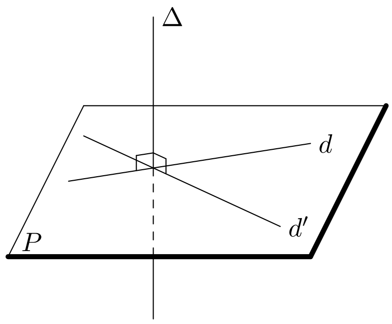
Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube alors $(AD) \perp (HG)$.

Remarques :
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires, elles ne le sont que si elles sont coplanaires. En revanche la réciproque est vraie par définition de droites orthogonales.
- Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles. (facile à voir dans un cube)

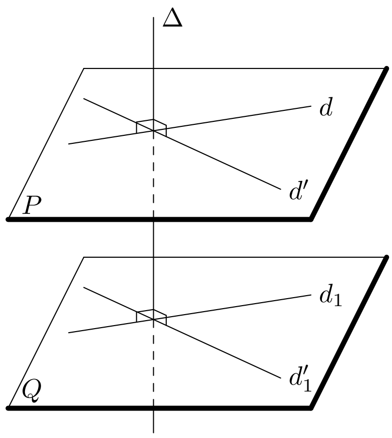
Définition 10 :
Une droite d est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

IX-1 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

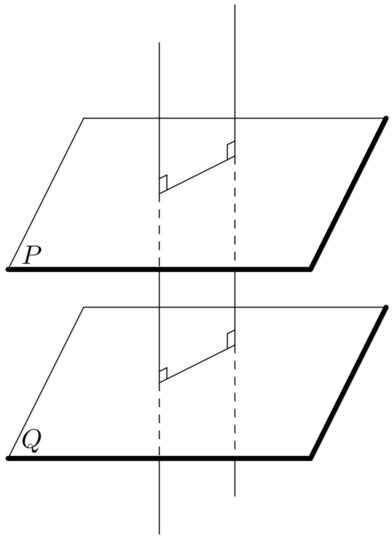
Théorème 11 :
Pour qu'une droite Δ soit orthogonale à un plan P il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de P.



Théorème 12 :
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.



Théorème 13 :
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

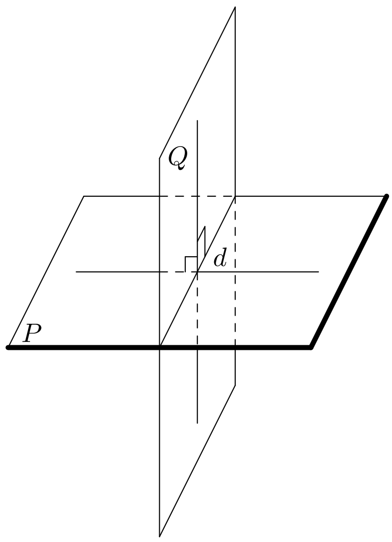


IX-2 Orthogonalité de deux droites de l'espace

Théorème 14 :
Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

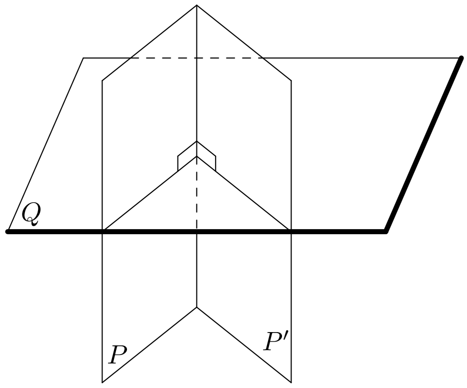
IX-3 Plans perpendiculaires

Définition 11 :
Un plan Q est perpendiculaire à un plan P ($Q \perp P$), si il existe une droite de Q orthogonale à P. (Dans ce cas on a aussi $P \perp Q$).



Remarques :
- l'exemple qu'il faut avoir en tête est celui d'un cube : deux faces quelconques non parallèles sont perpendiculaires.
- Si $P \perp Q$ alors toute droite de l'un n'est pas orthogonale à l'autre, c'est vrai pour l'une d'entre elles.(Dans un cube $ABCDEFGH$ les faces $ABFE$ et $ABCD$ sont perpendiculaires mais la droite (AF) n'est pas orthogonale à la face $ABCD$ car elle n'est pas orthogonale à (AB))
- Si $P \perp Q$ et $P' \perp Q$ alors P et P' ne sont pas nécessairement parallèles (facile à voir dans un cube avec les faces). Cette relation de perpendicularité de plans est donc moins souple que celle de perpendicularité de droites.

Théorème 15 :
Si P et P', deux plans sécants, sont perpendiculaires à un même plan Q, alors leur intersection est orthogonale à Q.



Théorème 16 :
Si $P \perp Q$, toute droite de l'un, qui est orthogonale à leur intersection, est orthogonale à l'autre. (voir la figure de la définition précédente)

X) Vecteurs de l'espace (Hors Programme)

La notion de vecteur (sens, direction, longueur) vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace. Les notions suivantes aussi :

1. Pour tout point O de l'espace et tout vecteur u, il existe un point A et un seul tel que $\overrightarrow{OA} = u$.
2. Égalité de deux vecteurs à l'aide de la définition (sens, direction, longueur) ou caractérisation à l'aide d'un parallélogramme.
3. Les règles de calculs (Relation de Chasles, règle du parallélogramme, multiplication d'un vecteur par un réel)
4. La colinéarité de deux vecteurs et son application au parallélisme ou bien à l'alignement de trois points.