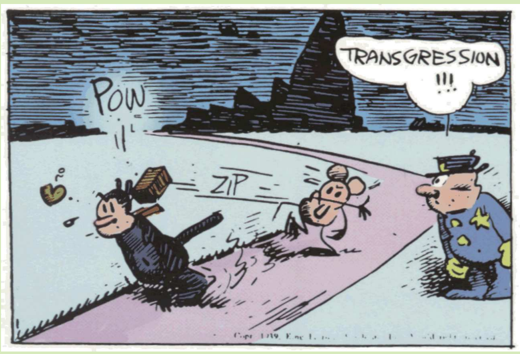
Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

Hors Sujet



Titre : « Krazy Kat »
Auteur : George Herriman
Présentation succinte de l'auteur : Krazy Kat est un comic strip américain créé par George Herriman et publié dans les journaux du pays, en semaine et le week-end, entre 1913 et 1944. La première publication se fit dans le New York Evening Journal de William Randolph Hearst. La série mêle surréalisme, poésie insouciance enjouée, ce qui en a fait l'une des BD préférées des passionnés et des critiques depuis plus de 80 ans. Les strips sont centrés sur une relation triangulaire entre son personnage éponyme, un chat innocent et désinvolte de sexe indéterminé (mais le plus souvent considéré comme une femelle), son antagoniste Ignatz Mouse, et le sergent Pupp (Officer Pupp), officier de police. Krazy est transi d'amour pour Ignatz mais celui-ci le méprise, et passe son temps à chercher à lui lancer une brique à la tête. Ce que Krazy interprète comme une preuve d'amour… Pupp, en tant que garant de l'ordre de la région de Coconino, fait tout pour empêcher Ignatz d'arriver à son but et enferme bien souvent la souris en prison. En dépit de la simplicité de l'intrigue, la peinture des caractères détaillée, à laquelle s'ajoute la créativité verbale et visuelle d'Herriman, font de Krazy Kat l'une des premières bandes dessinées à avoir été considérée comme de l'art par les intellectuels. Gilbert Seldes, célèbre critique d'art de l'époque, écrivit en 1924 un long panégyrique du strip, le qualifiant alors de « travail artistique le plus amusant, fantastique et satisfaisant de l'Amérique contemporaine ». Le poète renommé E. E. Cummings, autre admirateur de George Herriman, écrivit l'introduction du premier album de Krazy Kat. Plus récemment, beaucoup de scénaristes et dessinateurs constatent que le strip a eu une influence majeure sur leurs œuvres.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 4

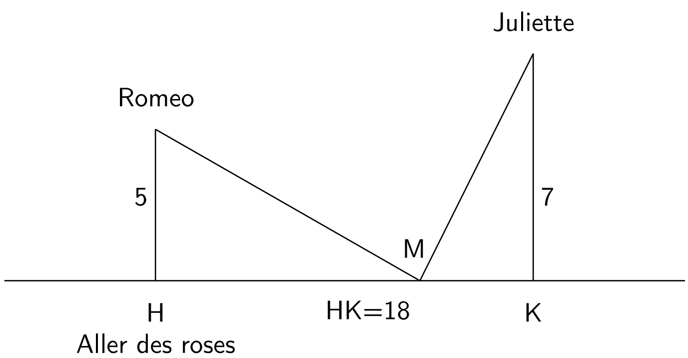
Généralités sur les fonctions

Résumé

En mathématiques, une fonction est un concept dont la définition a évolué depuis son introduction par Leibniz à la fin du XVIIe siècle. D'abord associée à une courbe du plan, la notion est ensuite développée comme la combinaison d'opérations à partir d'une variable. Le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative en permet une étude plus approfondie. Compte tenu du nombre incroyable d'application en physique, en économie et dans quasiment tous les domaines, l'étude des fonctions est un des objectifs majeurs du lycée en mathématiques.

Problème d'introduction

Roméo souhaite au plus vite offrir une fleur à sa Juliette. La situation est schématisée de la façon suivante :



? Question :
Quel chemin doit prendre Roméo pour rejoindre Juliette le plus tôt possible ?

I) Notion de fonction

I-1 Définition et vocabulaire

Définition 1 :

Une fonction est un procédé qui fait correspondre à un élément d'un ensemble de départ **au plus** un élément d'un ensemble d'arrivée.
Fabriquer une fonction sur un ensemble D c'est donner un algorithme (une procédure ici calculatoire) qui à chaque élément $x \in D$ associe **au plus** un nombre, souvent noté $f(x)$.

Exemple :

Vous connaissez déjà quelques fonctions en géométrie :
- Le périmètre d'un cercle est la fonction qui à tout réel positif R associe le réel $P(R) = 2\pi R$
- L'aire d'un cercle est la fonction qui à tout réel positif R associe le réel $A(R) = \pi R^2$
- Le périmètre d'un rectangle est la fonction qui à tout couple de réels positifs $(l;L)$ associe le réel $\mathscr{P}(l;L) = 2(l+L)$
- L'aire d'un rectangle est la fonction qui à tout couple de réels positis $(l;L)$ associe le réel $mathscrA(l;L) = l \times L$
- L'aire d'un triangle est la fonction qui à tout couple de réels positifs $(b;h)$ associe le réel $\mathscr{A}(b;h) = \dfrac{b \times h}{2}$
- Le volume d'un parallélépipède rectangle est la fonction qui à tout triplet de réels positifs $(a;b;c)$ associe le réel $\mathscr{V}(a;b;c) = abc$

Remarque : En classe de seconde nous intéresserons qu'aux fonctions dont l'ensemble de départ est contenu dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire

Les fonctions sont appelées par des lettres. On note par exemple f la fonction qui à tout réel x positif associe le réel $5 + 3x\sqrt{x+2}$ de la manière suivante :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 5 + 3x\sqrt{x+2} \end{array}$$

On dit que $5 + 3x\sqrt{x+2}$, noté bien souvent $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
De la même manière, on dit que x est l'**antécédent** de $f(x)$.

Remarque : Un nombre peut ne pas avoir d'antécédent comme en avoir plusieurs. Par contre l'image d'un nombre, losrqu'elle existe, est unique.

Attention !

Il n'est pas rare de confondre, et pendant des années, l'image du réel x par la fonction f, à savoir $f(x)$ qui désigne un nombre réel, avec la fonction f elle-même qui désigne une fonction...

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{x}$.

1. Calculer $f(-3)$, $f(2)$ et $f(-1)$.
2. Pourquoi l'image de 0 par f n'existe-t-elle pas ?

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. Déterminer l'image des réels 0 ; $-\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$ par f.
2. Déterminer les éventuels antécédents de 3 par f.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)^2 + 2$.
4. Déterminer les éventuels antécédents de 2 et de -4 par f.

I-2 Algorithme

Le lien entre les algorithmes et le calcul de l'image d'une fonction et/ou de la recherche de l'antécédent d'un réel est direct. En effet on calcule des images ou on recherche des antécédents toujours de la même manière.

Exercice 3 :

On choisit un nombre x, on lui ajoute 4, on élève le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ. Quelle est l'expression algébrique de l'image $f(x)$ de x ? Quelle est l'image de 4 ? de 0 ?

Exercice 4 :

Soit la fonction

$$\begin{array}{rll} g: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 - 3 \end{array}$$

Décrire l'algorithme correspondant à la fonction g.
Déterminer l'image de 3, puis celle de -1 par la fonction g.
Déterminer les antécédents éventuels de 6, de -3 et de -4 par la fonction g.

Exercice 5 :

1. Que fais l'algorithme ci-dessous ?
2. Décrire, à l'aide du vocabulaire définit précédemment la fonction mise en valeur par l'algorithme ci-dessous :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  fx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  fx PREND_LA_VALEUR sqrt(2*x)+5
  AFFICHER fx
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 6 :

Ecrire un algorithme permettant de déterminer les antécédents de n'importe quel nombre réel y par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1$$

II) Ensemble de définition

II-1 Valeurs interdites

Exercice 7 :

Soit f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$. Calculer l'image de 2, de 4 et de 3.

Définition 2 :

Par définition d'une fonction, un élément de départ peut ne pas avoir d'image, on dit alors que c'est une **valeur interdite**.

On trouve les valeurs interdites en appliquant les deux règles suivantes :

- On ne divise pas par zéro
- On ne prend pas racine d'un nombre strictement négatif

Il faudra donc toujours se poser les questions suivantes :
Dans l'expression de l'image,

- Y a-t-il un quotient ? Si oui, le dénominateur peut-il être nul ?
- Y a-t-il une racine ? Si oui, la quantité dont on prend la racine peut-elle être strictement négative ?

Exemple :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer les valeurs interdites.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x-1}{4-5x}$. Déterminer les valeurs interdites.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{-x+1}$. Déterminer les valeurs interdites.

Remarque : On peut alors écrire :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 3x + 1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ll} \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{5}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{3x-1}{4-5x} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ll}]-\infty;1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{-x+1} \end{array}$$

II-2 Ensemble de définition

Définition 3 :

L'ensemble des réels possédant exactement une image par une fonction f est appelé **ensemble de définition** de la fonction. On le note D_f.

Remarque : Pour trouver l'ensemble de définition il suffit de trouver l'ensemble des valeurs interdites.

Exemple :

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

f a une valeur interdite 1, par conséquent l'ensemble de définition de f est :

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Exercice 8 :

Soient les fonctions D, T et L définie par $D(x) = 4x^2 - x + 3$, $T(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x-1)(2x+3)}$ et $L(x) = \sqrt{5x - 9}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de chacune des trois fonctions.
2. Déterminer l'image de -1 par D, de 0, de -2 par T et de 2 par L.
3. Déterminer les antécédents de 3 par D, de 0 par T, de 4 par L, puis de $\dfrac{47}{16}$ par D, de -5 par L.

III) Représentation graphique

III-1 Définition

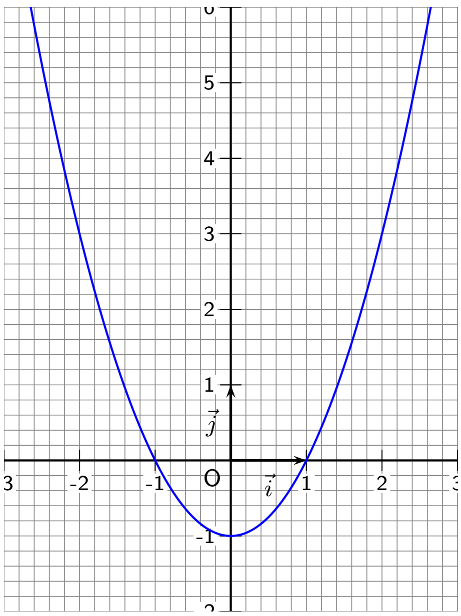
Remarque : On peut associer à une fonction un tableau de valeurs. Il comporte deux lignes, la première regroupe les antécédents et la seconde les images correspondantes.

Exemple :

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x^2 - 1$

x	-3	2	0	-1	7	1,5	4
$d(x)$							

Représenter dans un repère orthonormé les points de coordonnées $(x; d(x))$.
Imaginer alors l'allure de la courbe représentative de la fonction d.



Définition 4 :

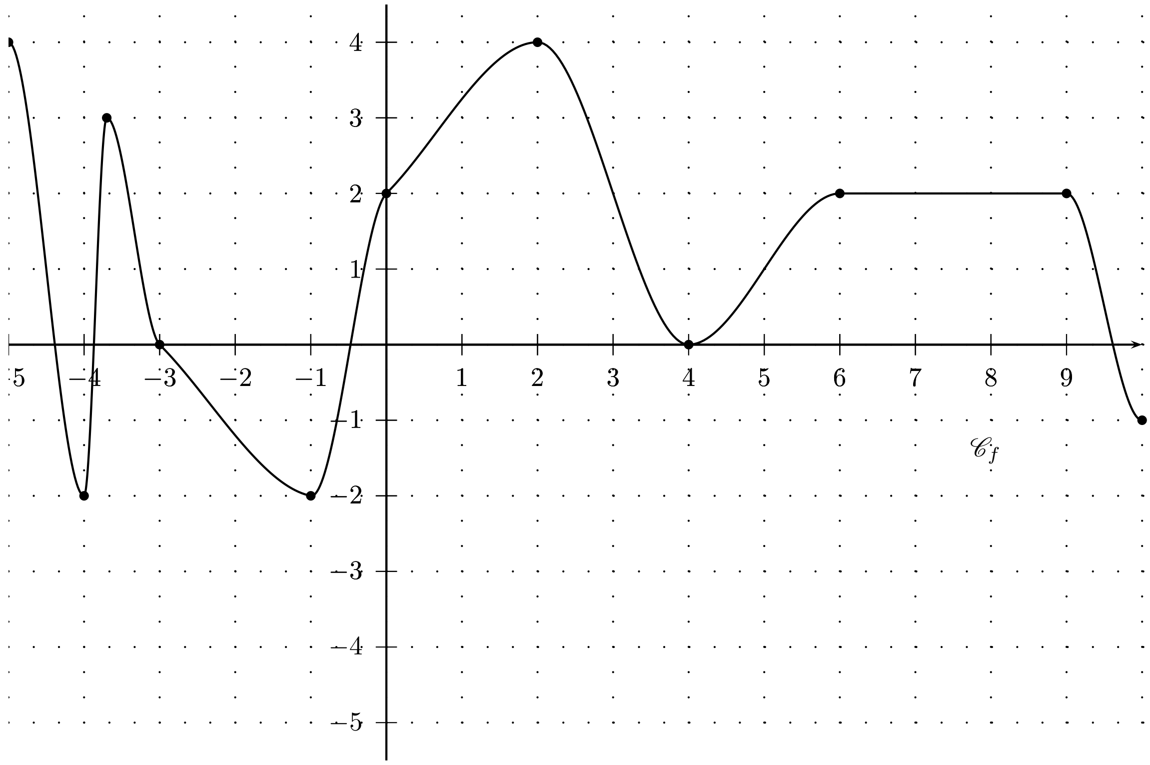
La **représentation graphique** d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt D_f.

Exemple :

Soit la fonction a définie par $a(x) = x^3 - 3x + 1$. Tracer sa courbe représentative.

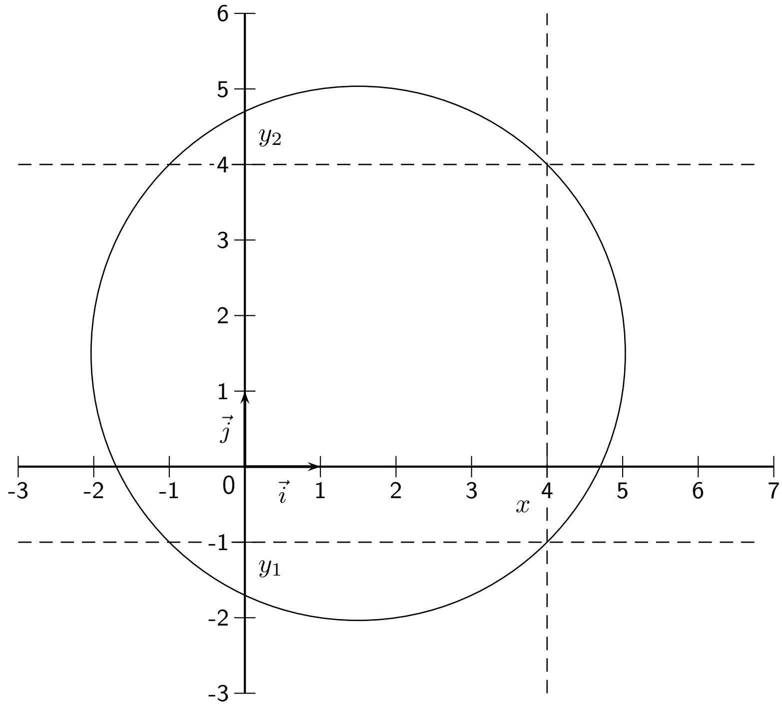
Remarque : Limite : Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on relie les points du tableau de valeurs avec le plus de cohérence possible. Néanmoins, on ne sait pas comment varie la fonction entre deux points de la

courbe. Pour être plus précis, il suffit d'agrandir le tableau de valeurs en diminuant le pas.
Cependant, pour prévoir l'allure d'une courbe, nous allons étudier ses variations. Il est utile de consulter le tracé de la courbe sur la calculatrice avant d'effectuer son propre tracé.
Observons la représentation graphique suivante d'une fonction f :



Sans connaître à l'avance son allure i.e ses variations (savoir quand elle est croissante (quand elle monte) et savoir quand elle est décroissante (quand elle descend) il aurait été facile de tracer une courbe à l'allure bien différente...

Remarque : Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions. On s'appuie sur la définition pour le comprendre. En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.



Remarque : Pour obtenir un tableau de valeurs (et la courbe représentative d'une fonction) à la calculatrice graphique :

- On rentre la fonction considérée dans $Y =$ OU dans Menu + Graph.
- On règle les paramètres du tableau de valeurs (première, dernière valeur de x et pas) dans le menu Table + Tblset (jaune + F4) OU Menu + Table + F5, :

  Start=..., End=..., Pitch=... (sur Casio)
  TblStart=..., ΔTbl=... (sur TI)

- On affiche le tableau dans le menu Graph
- On affiche la courbe représentative dans le menu Trace

III-2 Symétrie éventuelle

Dans cette partie on considère uniquement des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour des fonctions non définies sur $\mathbb{R}$ il est aisé d'étendre la définition, en considérant des fonctions définies sur un intervalle centré autour de 0.

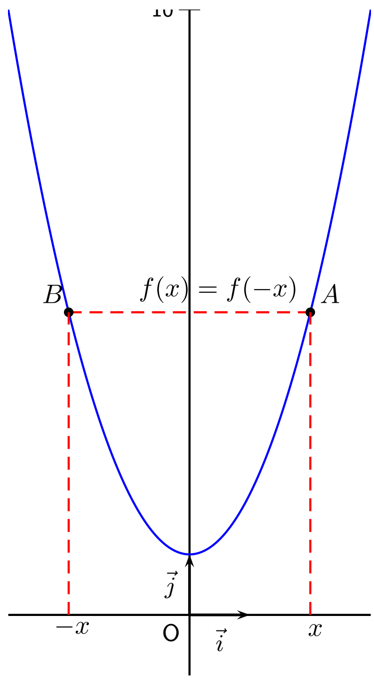
III-2.1 Fonction paire

Définition 5 :

Une fonction est paire si et seulement si sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :

On considère la fonction qui a x associe $x^2 + 1$. Voici sa représentation graphique, comme elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on conclut que cette fonction est paire.



Remarque :

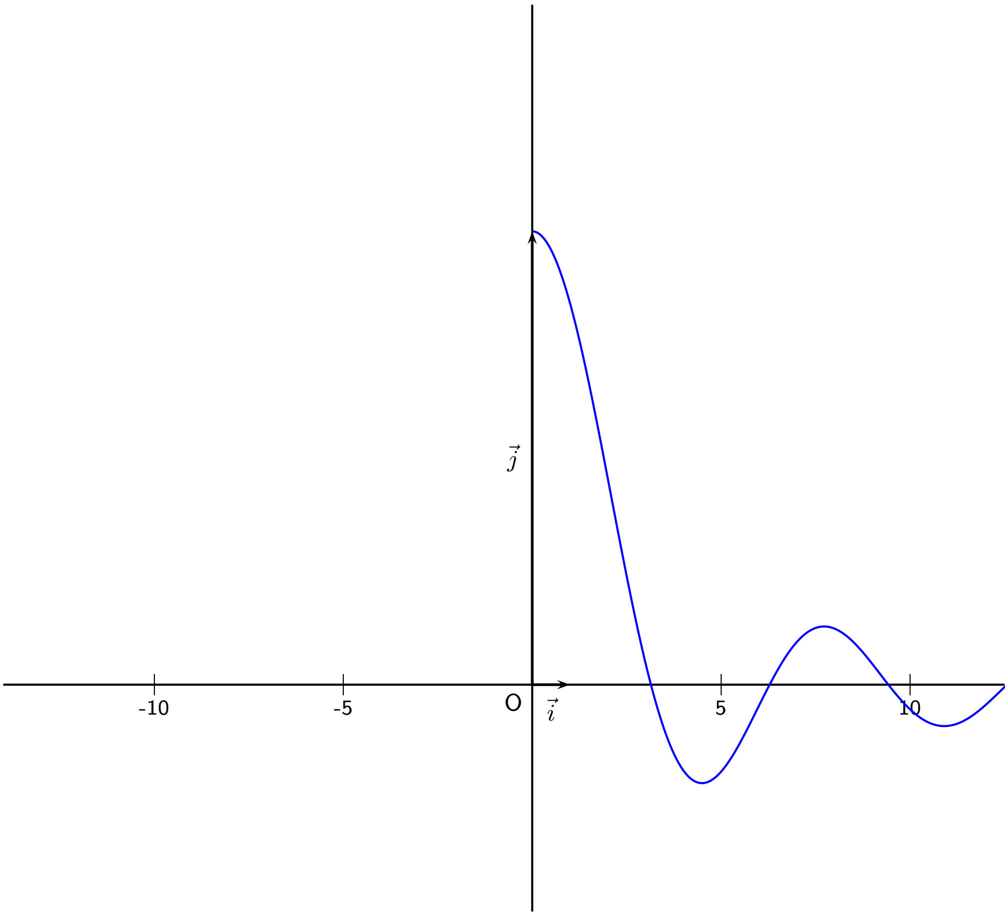
- Si l'on connait le tracé de la représentation graphique d'une fonction f, paire, sur $[0; +\infty[$, on en déduira son tracé sur $]-\infty; 0]$ par symétrie.
- Observons sur la courbe précédente les points A et B. Comme la fonction est paire, A et B ont la même ordonnée i.e si f est une fonction paire alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x)$$

  La réciproque de ce résultat est vraie, si $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction paire.
  Par conséquent on peut prévoir, à l'aide de ce résultat et sans la courbe d'une fonction, si elle est paire ou non.

Exercice 9 :

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Compléter le tracé ci-dessous :



Exercice 10 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

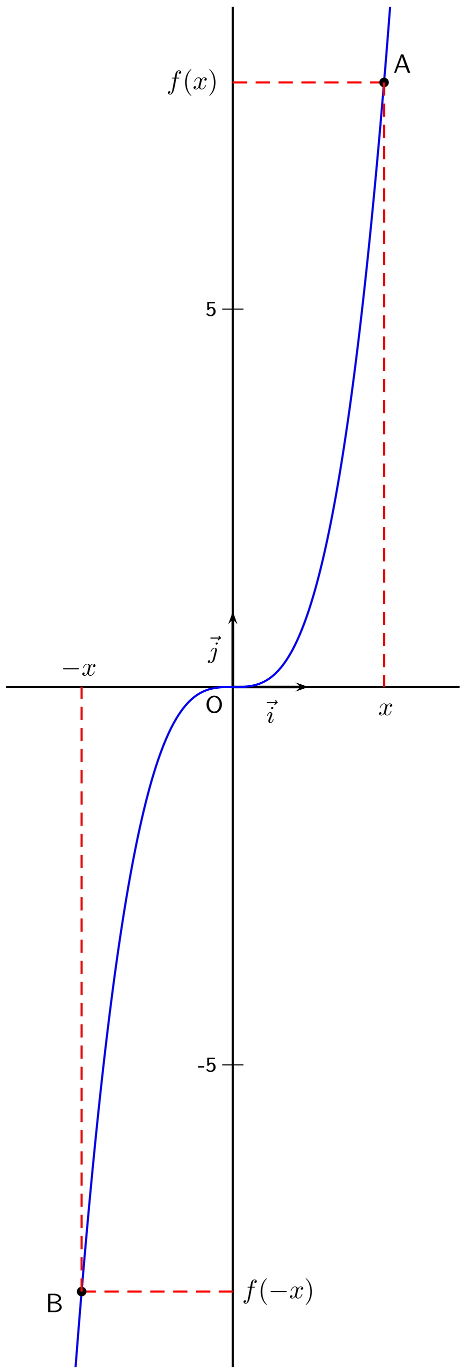
$$f(x) = x^4 + 5$$

Montrer que f est paire.

III-2.2 Fonction impaire

Définition 6 :
Une fonction est impaire si et seulement si sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple :
On considère la fonction qui a x associe x^3. Voici sa représentation graphique, comme elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on conclut que cette fonction est impaire.



Remarque :

- Si l'on connait le tracé de la représentation graphique d'une fonction f, impaire, sur $[0;+\infty[$, on en déduira son tracé sur $]-\infty;0]$ par symétrie.
- Les points A et B sont deux points de la représentation graphique de f symétriques par rapport à l'origine du repère, par conséquent leurs ordonnées sont opposées et on a $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque de ce résultat est vraie. D'où la propriété suivante :

Propriété 1 :
Une fonction f est impaire si et seulement si

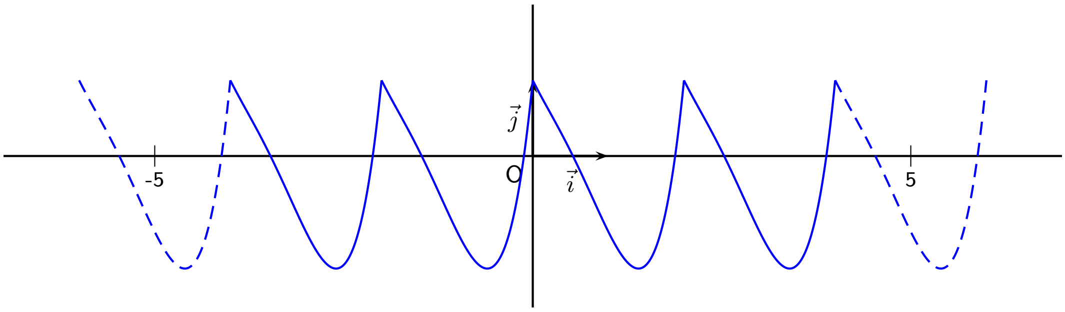
$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

III-2.3 Fonction périodique

On peut lire sur wikipédia, la définition suivante des fonctions périodiques :

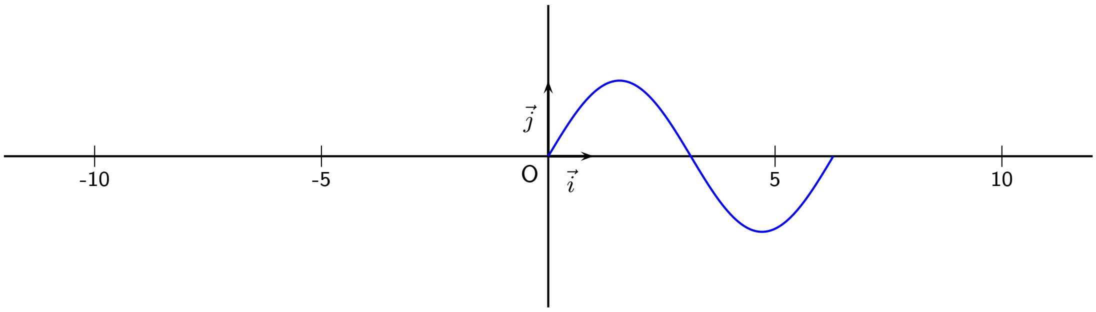
Définition 7 :
une fonction périodique est une fonction qui lorsqu'elle est appliquée à une variable, reprend la même valeur si on ajoute à cette variable une certaine quantité fixe appelée période

Exemple :
Des exemples de telles fonctions peuvent être obtenus à partir de phénomènes périodiques, comme l'heure indiquée par la petite aiguille d'une horloge, les phases de la lune, etc. On étudiera à la fin de l'année, les fonctions trigonométriques, qui sont de très bon exemples de fonctions périodiques. Observons la représentation graphique d'une fonction périodique, de période 2 :



Ici on a représenté une fonction f sur $[-4;4]$, puis en pointillé on a reproduit par symétrie la courbe sur $[-6;6]$. Remarquons que cette fonction est aussi paire, puisque sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 11 **:**
Ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[0;2\pi]$. Sachant que f est périodique de période 3, représenter graphiquement la fonction f sur $[-2\pi;4\pi]$.

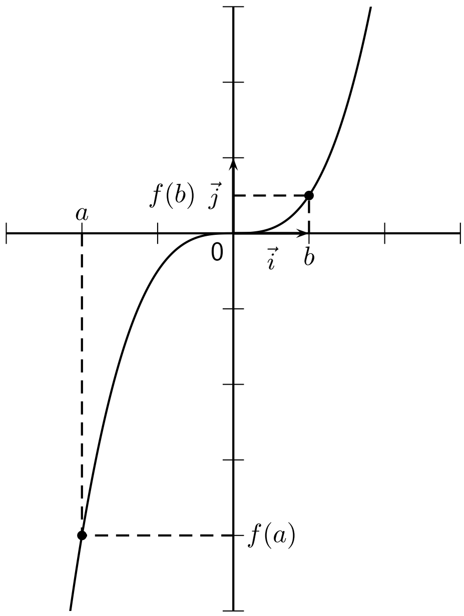


IV) Variations

IV-1 Définition graphique

Définition 8 :
On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si la représentation graphique de f « monte »sur I

Exemple :
La représentation graphique de cette fonction « monte »sur l'intervalle $[-3;2]$, par conséquent la fonction est croissante sur $[-3;2]$



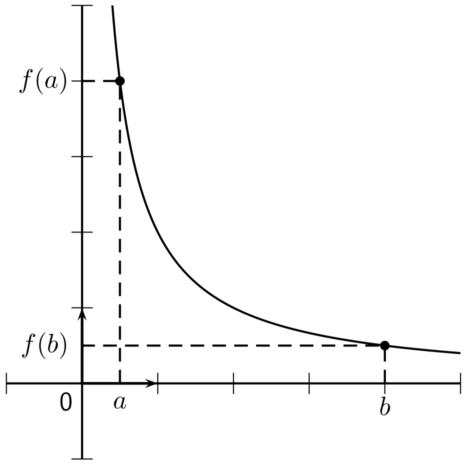
Remarque : Lorsqu'une fonction est croissante, les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre.

Définition 9 :

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I si et seulement si la représentation graphique de f « descend »sur I

Exemple :

La représentation graphique de cette fonction « descend »sur l'intervalle $[0;5]$, par conséquent la fonction est décroissante sur $[0;5]$

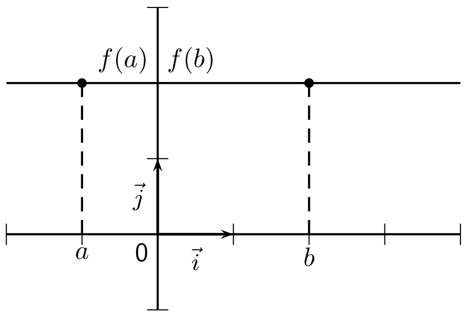


Remarques :
- Antécédents et images sont rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.
- On ne parle de fonction croissante ou décroissante que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.
- On parle de fonction monotone sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.

Définition 10 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est constante si et seulement si la représentation graphique a une pente nulle, i.e ne monte pas plus qu'elle ne descend.

Exemple :



Remarque : La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

IV-2 Tableau de variation

On regroupe les informations sur les variations d'une fonction dans un tableau du type :

x	-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\longrightarrow$	-5

Les flèches signifient que la fonction f est strictement croissante, décroissante ou constante sur les invtervalles de x considéré.

Exercice 12 :

Tracer les courbes des fonctions suivantes et donner leurs tableaux de variations :

1. $f(x) = x^2 - 2$ **2.** $g(x) = -x^2 + x + 1$ **3.** $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

IV-3 Définition algébriste

Définition 11 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b) \qquad (\text{respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)\ )$$

Définition 12 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b) \qquad (\text{respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)\ )$$

Définition 13 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est constante si pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$

Remarque : Dans la pratique il est plus utile de retenir ces définitions, certes moins intuitive, elles permettent néanmoins de résoudre des problèmes avec plus d'efficacité.

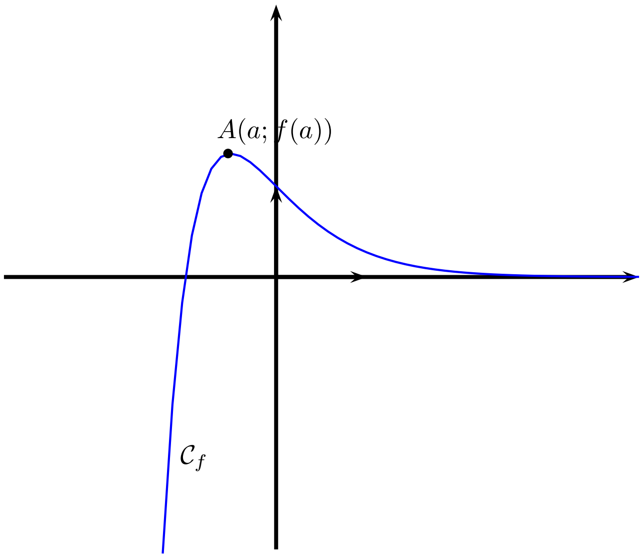
Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est croissante.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$. Montrer que g est décroissante.

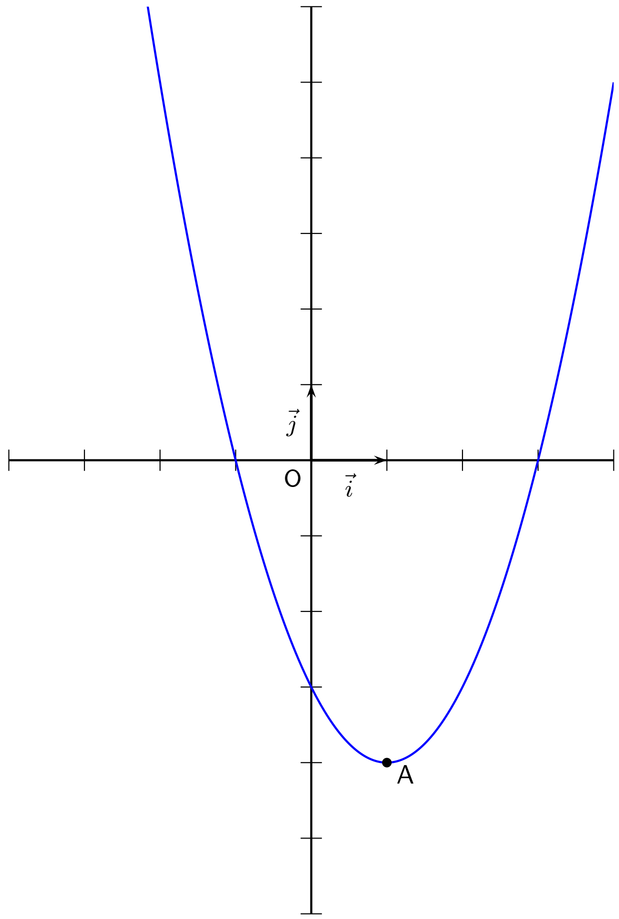
V) Extrema

V-1 Définition graphique

Comme son nom l'indique les extrema d'une fonction représentent les valeurs extrêmes d'une fonction. Cela correspond souvent au sommet des représentations graphiques. On distingue alors maximum et minimum mais appuyons sur l'exemple suivant :



Le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un sommet de la courbe $\mathscr{C}_f$. On dira que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle I, ce maximum est atteint pour $x = a$.
Observons la représentation graphique d'une fonction g sur un intervalle I



De la même manière que précédemment le point $A(a; f(a))$ est un sommet de la courbe, mais cette fois ci il s'agit d'un minimum. On dit que $g(a)$ est le minimum de g atteint en a.

V-2 Définition algébriste

Définition 14 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un maximum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$.
$f(a)$ est le maximum de f sur I, atteint en a.

Exemple :

Quel est le maximum de la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 3$?
Pour tout x on a $-x^2 \leq 0 \iff -x^2 + 3 \leq 3 \iff t(x) \leq t(0)$.
Donc le maximum de t est 3, atteint en 0 (pour $x = 0$).

Définition 15 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un minimum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \geq f(a)$.
$f(a)$ est le minimum de f sur I, atteint en a.

Exemple :

Quel est le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - \sqrt{3}$?
Pour tout x on a $x^2 \geq 0 \iff x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \iff v(x) \geq v(0)$.
Donc le minimum de v est $\sqrt{3}$, atteint en 0 (pour $x = 0$).

Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

Exercice 14 :

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 5cm. Soit I un point du cercle (C) et M un point du segment $[OI]$, différent de O et I. La perpendiculaire à la droite (OI) passant par M coupe le cercle (C) en A et B.

1. Construire les points E et F, symétriques respectifs de A et B par rapport à O.
2. Montrer que le quadrilatère $AFEB$ est un rectangle inscrit dans le cercle (C).
3. On note $OM = x$ et $Aire(x)$ la fonction donnant l'aire du rectangle $AFEB$ en fonction de x.
   - **a.** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $Aire$?
   - **b.** Montrer que $Aire(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que le tableau de variations de $Aire$ est le suivant :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

   Tracer la courbe représentative de $Aire$.

5. Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AFEB$ est-elle maximum ? Quel est ce maximum ?
6. Que peut-on alors dire du rectangle $AFEB$?

Exercice 15 :

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur un intervalle $[-1;3]$:

x	-1		0		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

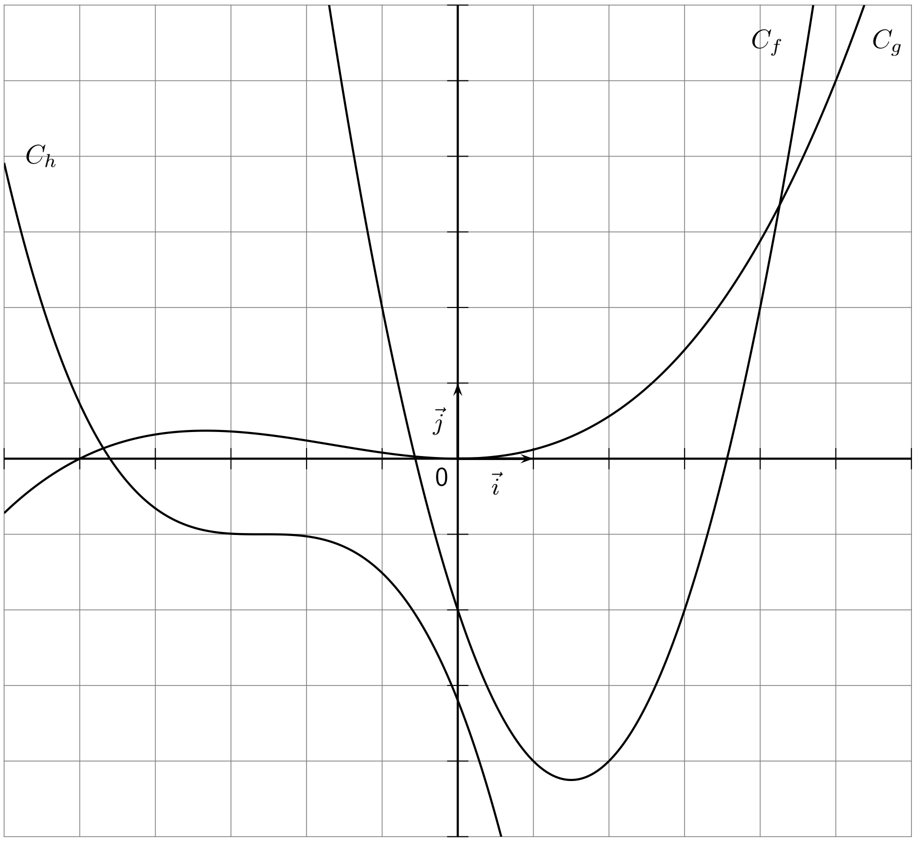
1. Lire $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quel est le maximum de f sur $[-1;3]$? Quand est-il atteint ?
3. Quel est le minimum de f sur $[-1;3]$? Quand est-il atteint ?
4. Pour $x \in [0;1]$, encadrer $f(x)$
5. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;3[$.
6. Encadrer $f(-0,5)$, $f(0,8)$ et $f(2,1)$

Exercice 16 :

Quelle est le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-2)^2 + 4$?

VI) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

<u>Travail de l'élève</u> : Soient f, g et h trois fonctions définies par le graphe suivant :



Résoudre :

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = h(x)$ puis, $f(x) = g(x)$ et enfin $g(x) = h(x)$
3. $f(x) < 2$, puis $g(x) \geq 1$
4. $f(x) \geq h(x)$ puis $f(x) < h(x)$

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, $k \in \mathbb{R}$

VI-1 Résolution graphique d'équations

Cas particulier : Résolution de $f(x) = k$ sur I.

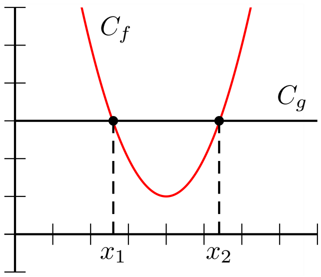
Déterminer sur un intervalle I les solutions de $f(x) = k$ revient à trouver tous les antécédents de k appartenant à I.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$:
Pour résoudre cette équaiton graphiquement, on trace la courbe représentative C_f de la fonction f, et la droite d d'équation $y = k$ (horizontale).
Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et d.

Exemple :
Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x-4)^2+1=3$$

Soit $f : x \to (x-4)^2+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $k=3$.
Donc $S=\{x_1;x_2\}$

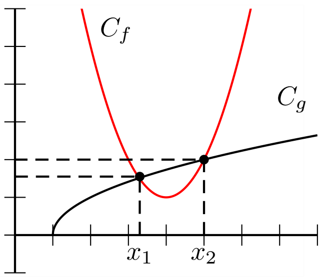


Méthode pour résoudre graphiquement $f(x)=g(x)$:
On trace sur I les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.
Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et C_g.

Exemple :
Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'équation

$$(x-4)^2+1=\sqrt{x+1}$$

Soient $f : x \to (x-4)^2+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \to \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1;+\infty[$.
Donc $S=\{x_1;x_2\}$



VI-2 Résolution graphique d'inéquations

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x)<g(x)$:
On trace sur I les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.
Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points de C_f se trouvant au dessous de C_g.

Exemple :
En prenant les deux exemples ci-dessus, on trouve $S=]x_1;x_2[$ dans les deux cas.

Exercice 1.

1. **a.** Développer $(x-1)^2(x+2)$
   b. Résoudre alors léquation $x^3-3x+2=0$
2. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^3$ et $k(x)=3x-2$
   a. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ de h et k sur l'intervalle $[-2;2]$.
   b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$.
3. À l'aide de la question 1), retrouver ce résultat par le calcul.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x)\leq 1$