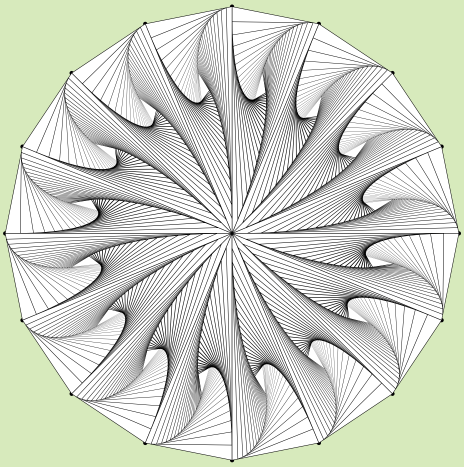
Chapitre 1

Les bases du calcul



Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »

Auteur : BANKSY-POCHOIRISTE

Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.

Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.

Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.

Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

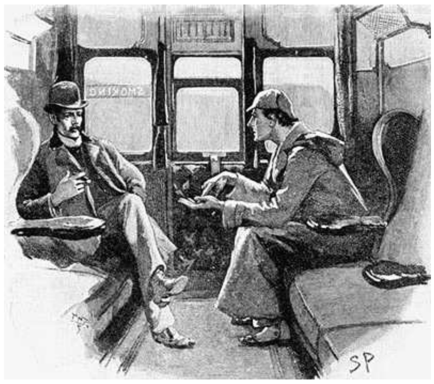
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 1

Les bases du calcul



I) Développer-Factoriser

I-1 Distributivité

Proposition 1 :
Pour tous nombres a, b et c on a : $a(b+c) = ab + ac$.
Développer une expression contenant des produits, c'est l'écrire en transformant les produits en sommes.
Ici c'est écrire le membre de gauche sous la forme du membre de droite : produit $\Rightarrow$ somme.
Réduire une expression développée c'est l'écrire sous forme de sommes contenant le moins de termes possible.
Factoriser une expression c'est l'écrire sous forme d'un produit.
Ici c'est écrire le membre de droite sous la forme du membre de gauche : produit $\Leftarrow$ somme.

Exercice 1 **:**
Développer et réduire l'expression

$$A = (3-2x)(4-x)$$

I-2 Identités remarquables

Identités Remarquables : Pour tous nombres a et b on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Remarque :
- Pour note, la seconde identité remarquable peut être considérée comme une extension de la première. En effet, il ne faut pas oublier que $a-b$ peut aussi s'écrire $a+(-b)$. Soustraire c'est aussi ajouter l'opposé.
- On pourrait en ajouter des tas d'autres comme $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ mais elles ne seraient d'aucune utilité en seconde. Retenir celles-là et surtout savoir en user suffira amplement à assurer notre bonheur.

Exercice 2 **:**
1. Développer $A = (4x-6)^2$ et $B = (3x-1)(3x+1)$
2. Factoriser $C = 25x^2 + 20x + 4$

Exercice 3 :

Développer :$A = (3\sqrt{2} - 4)^2$ $B = (7j + 3)(2j + 7)$ $C = (3m - 1)^2 + (4m + 2)(8n + 1)$

Factoriser : $D = (2i + 1)(3i + 2) + (2i + 1)(5i + 7)$ $E = (x - 1)(4x - 7) + x - 1$

$F = (3y - 4)(y - 3) + (y + 3)(3y - 4)$ $G = (3z + 6)(-7z - 3) + (3z + 6)(2z + 1) - (3z + 6)(4z + 1)$

I-3 Deux méthodes pour factoriser

Développer est la portée de n'importe qui (ou presque !). Par contre, factoriser n'est pas toujours évident. La factorisation est le fait d'écrire une expression sous la forme d'un produit. En Seconde, seules deux méthodes de bases comptent. L'une fait intervenir les identités remarquables et l'autre la mise en évidence d'un facteur commun.

I-3.1 Avec les identités remarquables

Exercice 4 :

Factoriser l'expression $x^2 - 49$

Remarque : Le grand secret dans ce genre d'affaires c'est de penser à la bonne formule au premier coup d'œil. Par exemple, une différence de deux carrés doit immédiatement faire penser à la troisième identités remarquable, c'est-à-dire $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

I-3.2 Avec un facteur commun

Cette technique repose sur la formule que nous avons énoncée à l'occasion du premier paragraphe, à savoir : $ab + a.c = a.(b + c)$.
Encore un conseil : une égalité marche dans les deux sens. C'est-à-dire que si machin est égal à bidule alors bidule est aussi égal à machin. Souvent, on ne voit qu'un des sens.

Exercice 5 :

factoriser l'expression $(2x + 1)(3x + 2) + (2x + 1)(7x - 2)$

I-3.3 Avec les deux techniques !

Il existe des cas où il faut recourir plusieurs fois aux techniques que nous venons de voir.

Exercice 6 :

Factoriser l'expression $(x^2 - 2x + 1) + 2x^2 - 2$

II) Règles de calcul sur les fractions

Fractions

Pour tous nombres a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$$a \times \frac{c}{b} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \quad ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \quad ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \dots \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\dots\dots}{bd} + \frac{bc}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots}$$

Exemples :

$$5 \times \frac{6}{7} = \dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{4}{15} \times \frac{6}{7} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{\frac{4}{15}}{\frac{6}{7}} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{36}{28} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{1}{8} = \dots\dots\dots\dots$$

Exercice 7 **:**

Effectuer et simplifier les fractions obtenues :

$$A = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \qquad B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \qquad C = \frac{4}{5} - \frac{7}{5} \times \left(2 + \frac{5}{6}\right) \qquad D = \frac{3 + \frac{6}{7}}{3 - \frac{6}{7}} \qquad E = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x}$$

III) Puissances

Définition 1 : *Puissances*

Soit a un nombre et n un nombre entier positif.

- Si $n \geq 1$, alors $a^n = \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{\dots\dots \text{ fois}}$ En particulier $a^1 = \dots\dots$
- Si $n = 0$ et $a \neq 0$ alors $a^0 = \dots\dots$

Si de plus $a \neq 0$, on définit le nombre a^{-n} comme $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ du nombre a^n : $a^{-n} = \dots\dots$

Exemples :

$$(-1,5)^3 = -3,375 \quad ; \quad 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} \quad ; \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

Attention !

Ne pas confondre $(-a)^n$, $-a^n$, $-a^{-n}$ et $(-a)^{-n}$

$$(-2)^4 = \dots\dots \quad ; \quad -2^4 = \dots\dots \quad ; \quad -2^{-4} = \dots\dots \quad \text{et} \quad (-2)^{-4} = \dots\dots$$

Propriété 1 :
Quels que soient les réels a et b, et les entiers relatifs n et m, on a les égalités suivantes (si elles sont définies) :

$$a^n \times a^m = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad (a^n)^m = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = \dots\dots\dots\dots$$

$$(ab)^n = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \dots\dots\dots\dots$$

Exemples :

Exercice 8 **:**

Simplifier au maximum : $\left(3^7 \times 2^{-6}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{33}$ $\qquad \frac{4^{-2}}{4 \times 49^{-3}} \times \left(-\frac{4}{7}\right)^5$

IV) Racine carrée

Définition 2 : *Racine carrée*
Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a}$ est .... nombre .... dont le carré vaut ....

Conséquence : Dès que l'on voit le nombre $\sqrt{a}$, on doit supposer ....

Exemples :

$\sqrt{49} = \dots\dots$; $\sqrt{-16} = \dots\dots$; $\sqrt{(-3)^2} = \dots\dots$; $\sqrt{(2-\Pi)^2} = \dots\dots$

Remarque : $\sqrt{a^2} = \pm a$ suivant le signe de a. On appelle ce nombre « valeur absolue » de a et on le note $|a|$

Propriété 2 :
Si a et b sont des nombres positifs et n un entier relatif, alors on a :

$$\sqrt{ab} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \dots\dots \text{ si } b \neq 0$$

Attention !

En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple $\sqrt{9+16} = \dots\dots$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \dots\dots$

Exercice 9 **:**
Calculer et mettre sous la forme la plus simple possible :

$\sqrt{2} \times \sqrt{18}$; $\sqrt{25 \times 49}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\frac{36}{49}}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$; $\sqrt{11^2}$; $\sqrt{72} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8}$; $\frac{3\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{\frac{12}{15}}$

Les Annexes

Développer et factoriser

1. Somme et produit :

Expression	Somme ou produit ?	Nombre de termes ou de facteurs
$3x$	produit	2 facteurs
$5y^2-3y+1$	somme	3 termes
$4(2a+3)$		
$a(c+2)-3x$		
$(s+3)(s-3)$		
r^2-9		
$4(e+3)(e-2)+5e(e+1)+3(e+4)$		
$2(t+1)+3t+2$		

2. Développer puis réduire si possible les expressions suivantes

$$A=-2a(5x-3a+4) \qquad B=5(x+2)-2(3x-1) \qquad C=-(a+b) \qquad D=-(a-b)$$

Même question pour $E=(2x-3)(5x+2)$. Contrôler le résultat obtenu pour $x=-3$

3. Factoriser les sommes ci-dessous en faisant apparaître le ou les facteur(s) commun(s) :

$$\begin{aligned}
\underline{(x+3)}+2\underline{(x+3)}(x-1) &= \underline{(x+3)}[1+2(x-1)]\\
5\underline{(z-2)}(z^2+7)-8z\underline{(z-2)} &= \underline{(z-2)}[5(z^2+7)-8z]\\
(4x+1)(x-2)+x(x-2) &=\\
(4x+1)(x-2)+x(2-x) &=\\
(5u-2)(4u+3)-(7u+1)(4u-3) &=\\
8g^3+4g &=\\
5d-5 &=\\
(a+b)(c+d)+c(a+b) &=
\end{aligned}$$

4. Avec les identités remarquables :

$(a+b)^2=$

$(a-b)^2=$

$(a+b)(a-b)=$

À l'aide d'une identité remarquable, factoriser les expressions suivantes :

$16x^2-9 =$ $\qquad$ $4x^2+4x+1 =$

$9x^2+24x+16 =$ $\qquad$ $4x^2-12x+9 =$

$x^2-3 =$

Travail de l'élève :

1. Calculer les carrés des nombres suivants : $-2; 5; 0,3; -1; 10^3; -\dfrac{2}{3}$
2. Quel est le signe du carré d'un nombre ?
3. Parmi les nombres suivants, dire ceux qui sont des carrés : $25; 7^2; -16; 10^4; \dfrac{4}{9}; -100; 49$
4. Quels sont les nombres qui ont pour carré 36 ? 100 ?