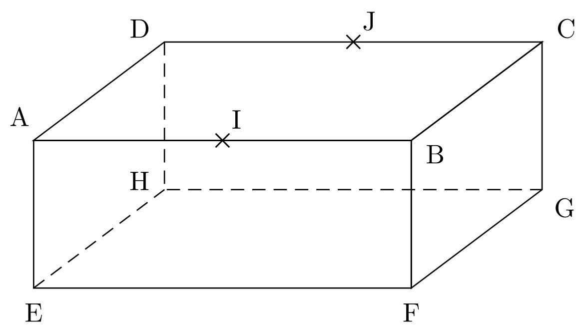
Correction du devoir surveillé 3

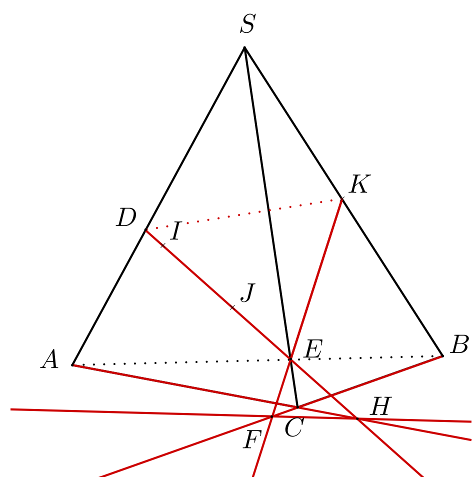
Exercice 1. *Positions relatives* (5 points)

$ABCDEFGH$ est le pavé droit ci-dessous. I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[DC]$.
Dans chaque cas, compléter la phrase par la position relative des éléments donnés.



1. Les droites (BH) et (BC) sont sécantes.
2. Les droites (AF) et (EG) sont non coplanaires.
3. Les droites (EH) et (BC) sont parallèles.
4. La droite (CH) et le plan (ABD) sont sécants.
5. La droite (GF) et le plan (BCE) sont parallèles.
6. La droite (AH) et le plan (BCG) sont parallèles.
7. Les plans (ACH) et (BEG) sont parallèles.
8. Les plans (AEG) et (ADH) sont sécants.
9. Les plans (ADI) et (BJC) sont confondus.
10. Les plans (BEG) et (AFC) sont sécants.

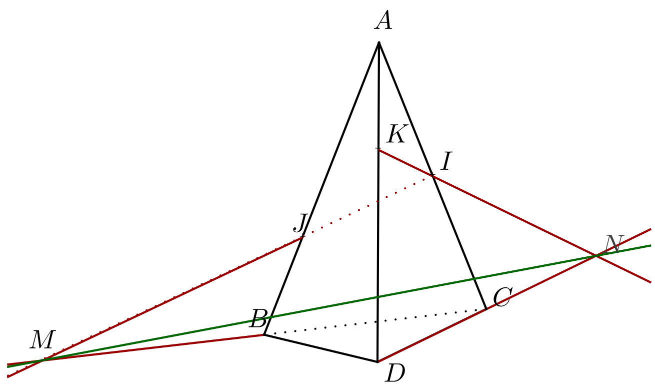
Exercice 2. (5 points)
Ci-dessous la section de la pyramide par le plan (IJK) :

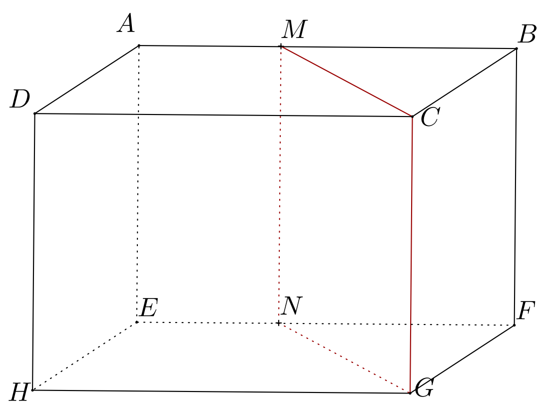


1. La trace du plan (IJK) sur la face SAC est le segment $[DE]$
2. La trace du plan (IJK) sur la face SCB est le segment $[EK]$
3. La trace du plan (IJK) sur la face SAB est le segment $[DK]$
4. cf. ci contre
5. L'intersection des plans (IJK) et (ABC) est une droite. De plus les points F et G sont deux points commun aux plans (IJK) et (ABC). (en effet $F \in (BC) \subset (ABC)$ mais encore $F \in (EK) \subset (IJK)$, de même pour le point G). Par conséquent (FG) est la droite d'intersection des deux plans (IJK) et (ABC).

Exercice 3. *Positions relatives* (4 points)
$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AC]$, J est au deux tiers de $[AB]$ à partir de A et le point K est situé au tiers de $[AD]$ à partir de A.

1. Déterminer et dessiner l'intersection de (IJ) et de (BCD), puis celle de (KI) avec (BCD).
   (IJ) et (BC) sont deux droites contenues dans le plan (ABC), elles sont sécantes en un point M puisque J n'est pas le milieu de $[AB]$.
   Au final M est un point commun aux plans (IJK) et (BCD) donc :
   $$(IJK) \cap (BCD) = M$$
   (KI) et (DC) sont deux droites contenues dans le plan (ADC), elles sont sécantes en un point N puisque K n'est pas le milieu de $[AD]$.
   Au final N est un point commun aux plans (IJK) et (BCD) donc :
   $$(KI) \cap (CD) = N$$
2. On vient de déterminer deux points commun aux plans (IJK) et (BCD), par conséquent :
   $$(IJK) \cap (BCD) = (MN)$$





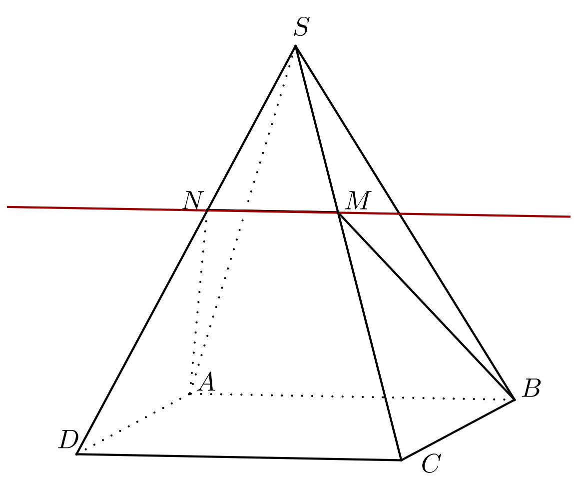
Exercice 4. *Section plane* (6 points)
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de dimension $AB = 8$ cm et $AD = DG = 4$ cm.
M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 3$.

1. cf ci-dessus.
2. La parallèle à la droite (CG) passant par M coupe (EF) en un point N.
   Le point N est donc commun au plan (MCG) et au solide $ABCDEFGH$, il en résultat que la trace du plan (MCG) sur le solide $ABCDEFGH$ est le quadrilatère $MCGN$.
   Démontrons que ce solide est un rectangle.
   Les segments $[MN]$ et $[CG]$ sont parallèles par construction, de plus la droite (MC) est perpendiculaire à la droite (CG) et donc à la droite (MN). Enfin la droite (NG) est perpendiculaire aux droites (CG) et (MN) puisque $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Il en résultat que $MCGN$ est un rectangle.

3. Tout d'abord $CG = 4 = MN$. Il reste à déterminer MC.
   Pour cela considérons le triangle rectangle BMC et appliquons le théorème de Pythagore, on a donc :
   $$MB^2 + BC^2 = MC^2 \iff 5^2 + 4^2 = MC^2 \iff MC = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$
   Les dimensions de ce rectangle sont donc 4 et $\sqrt{41}$.
4. Le but de cette question est de déterminer le volume du solide $MCGNBF$
   (a) L'aire $\mathscr{A}$ du triangle BCM est :
   $$\mathscr{A} = \frac{BM \times BC}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \quad \text{cm}^2$$
   (b) Le volume $\mathscr{V}$ du solide $MCGNBF$ est :
   $$\mathscr{V} = \mathscr{A} \times CG = 10 \times 4 = 40 \quad \text{cm}^3$$

Exercice 5. *Utiliser des théorèmes* (3 points)
$SABCD$ est un pyramide de sommet S à base rectangulaire telle que $AB = 5$ cm et $AC = 3$ cm.

1. Faire un schéma à main levée en perspective cavalière de cette pyramide.
2. Soit $M \in [SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
   Les droites (AB) et (DC) sont parallèles, de plus elles sont contenues dans les plans (SDC) et (SAB), deux plans qui sont sécants en (MN), par conséquent d'après le théorème du toit, les droites (AB), (DC) et (MN) sont parallèles.
3. On sait de plus que $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle SDC on a :
   $$\frac{SM}{SC} = \frac{MN}{DC} \iff \frac{2}{3} = \frac{MN}{5} \iff MN = \frac{10}{3} \quad \text{cm}$$



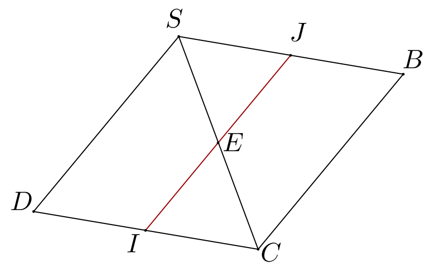
Exercice 6. *Question Cactus*
On considère une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ telle que toutes ses arêtes mesurent 8 cm. Une fourmi se déplace sur sa surface depuis le milieu I de l'arête $[CD]$ jusqu'au milieu J de l'arête $[SB]$. Quel est, en cm, le plus court chemin possible de I à J ?

Pour répondre à cette question considérons le patron de la pyramide régulière. Il y a trois chemins pour la fourmi qui semble candidat pour minimiser son trajet :

1. traverser le carré $ABCD$ puis rejoindre le point J par la face (SAB), la longueur du trajet serait alors supérieure à 8 (puisqu'un côté du carré mesure 8).

2. traverser le carré $ABCD$ jusqu'au côté $[BC]$ puis rejoindre le point J, la longueur du trajet serait alors supérieure à 8 (On le montre en appliquant plusieurs fois le théorème de Pythagore)
3. passer par les faces SDC et SBC. Dans la suite on s'intéresse uniquement à ce trajet qui semble et qui est le plus court pour la fourmi.

Intéressons nous aux deux faces SDC et SBC qui sont deux triangles équilatéraux, on obtient la figure suivante (dans le plan) :



Le plus court chemin entre I et J est le segment $[IJ]$ sécant avec $[SC]$ en E, démontrons que E est le milieu de $[SC]$.
Comme notre pyramide est régulière le quadrilatère non croisé $SDCB$ a ses côtés deux à deux égaux, il s'agit donc d'un parallélogramme, ainsi la diagonale $[SC]$ et la droite (IJ) sont sécantes en E milieu de $[SC]$, on obtient finalement le chemin que doit emprunter la fourmi pour aller de I en J par le chemin le plus court :