Correction du devoir Maison 5

Exercice 1. *Centre de gravité de la dimension* 1 *à la dimension* 3 (16 points)
Les figures seront réalisées sur une feuille de papier blanche.

1. On considère un segment $[AB]$ de longueur 5 cm, et G le point définit par :

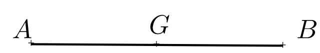
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

   (a) On a :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AG}\iff\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

   Le point G est au milieu du segment $[AB]$.

   (b)



   (c) Quel que soit le point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{MG}$$

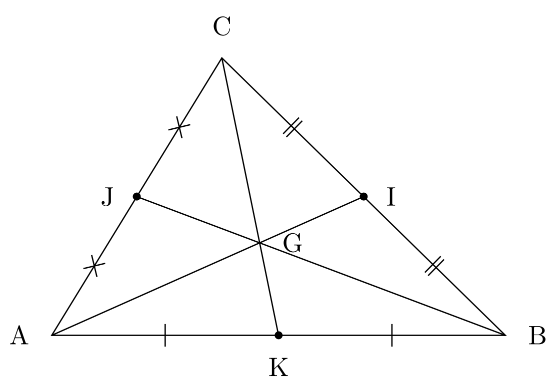
2. On considère un triangle ABC et G son centre de gravité définit par :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

   (a) Montrer que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\iff\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

   (b)



   (c) Quel que soit le point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}$$

3. On considère un tétraèdre $ABCD$, notons G le point définit par

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$$

(a) On a

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4}$$

(b) Démontrons dans un premier temps que

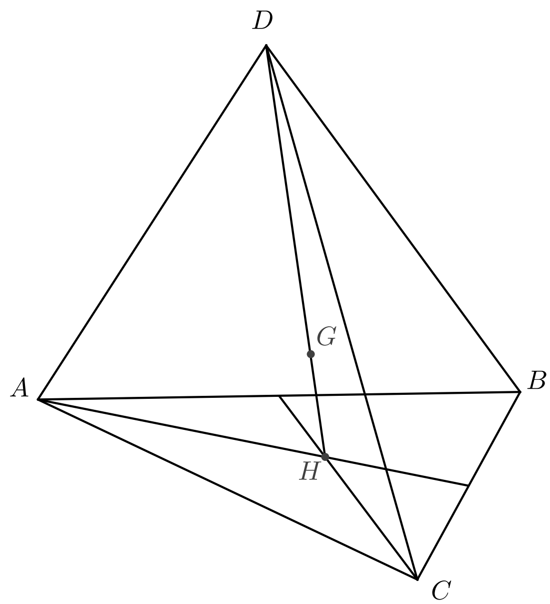
$$\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$$

où H est le centre de gravité du triangle ABC.
D'après la partie précédente pour $M=G$ on a :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GH}=3\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{DH}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}\iff 3\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}\iff 4\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$$

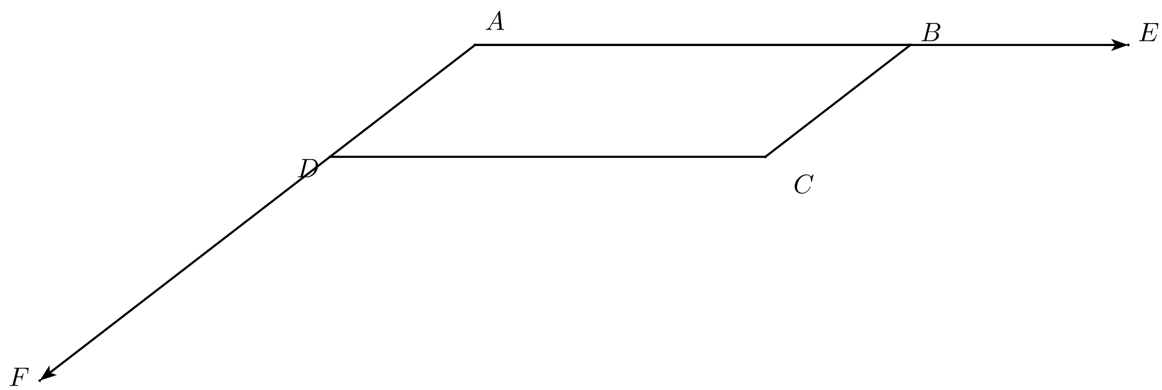


(c) Quel que soit le point M de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{MG}$$

<u>Exercice</u> 2. *Alignement* (4 points)
$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points E et F définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=-2\overrightarrow{DA}$



2. On a :

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$$

   De plus,

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

3. Par conséquent, en utilisant les résultats de la question précédente on a :

$$\overrightarrow{FE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} = 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 3\overrightarrow{CE}$$

   Ce qui démontre que les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

4. Comme $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires on en déduire que E, F et C sont alignés.