Correction du devoir Maison 4 : Les fonctions

Exercice 1. On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Soit $I \in \mathscr{C}$ et $M \in [OI]$, différent de O et I. La perpendiculaire à la droite (OI) passant par M coupe $\mathscr{C}$ en A et B.

1. cf ci-dessous.

2. voir figure.

3. Les triangles ABF et EBF sont inscrit dans $\mathscr{C}$, de plus un de leurs côtés $[BF]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, par conséquent ce sont deux triangles rectangles en A et en E. Le même raisonnement est valable pour les triangles ABE et AFE, ainsi le quadrilatère $ABEF$ a quatre angles droits, il s'agit donc d'un rectangle.

4. On note $OM = x$ et $\mathscr{A}(x)$ la fonction donnant l'aire du rectangle $AFEB$ en fonction de x.

a. Etant donné que M varie entre O et I, la longueur $OM = x$ varie entre 0 et 1 donc :

$$D_f =]0;1[$$

b.

$$\mathscr{A}(x) = AB \times AF = AB \times 2x$$

Dans le triangle rectangle AMO nous calculons MO à l'aide du théorème de Pythagore. Notons que $AO = 1$ puisque étant un rayon du cercle $\mathscr{C}$ Ainsi :

$$AM^2 + MO^2 = OA^2 \iff AM^2 = 1 - x^2 \iff AM = \sqrt{1-x^2}$$

Par conséquent $AB = 2\sqrt{1-x^2}$, et donc

$$\mathscr{A}(x) = 2x \times 2\sqrt{1-x^2} = 4x\sqrt{1-x^2}$$

5. Cf ci-dessous.

6. D'après le graphique l'aire maximale semble être 2 cm^2, atteinte pour environ 0,7.
Essayons de prouver cette conjecture.
On va montrer que la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right[$.
Considérons deux réels a et b dans l'intervalle $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ tel que $0 < a < b \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Montrons que $f(a) < f(b)$ pour vérifier que les images sont rangés dans le même ordre que les antécédents.
Comparer $f(a)$ et $f(b)$ revient à comparer leur carré :

$$f(a)^2 - f(b)^2 = 16a^2(1-a^2) - 16b^2(1-b^2) = 16(a^2-a^4-b^2+b^4) = 16(a^2-b^2-(a^4-b^4)) = 16((a^2-b^2)-(a^2-b^2)(a^2+b^2)) = 16($$

Comme $a < b$ on a $a^2 - b^2 < 0$ et comme a et b sont compris entre 0 et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $1 - a^2 - b^2 > 0$, ainsi $f(a)^2 - f(b)^2 < 0$ et donc $f(a) < f(b)$ ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On procède de même pour démontrer qu'elle est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right[$, ce qui justifie le tableau de variation suivant :

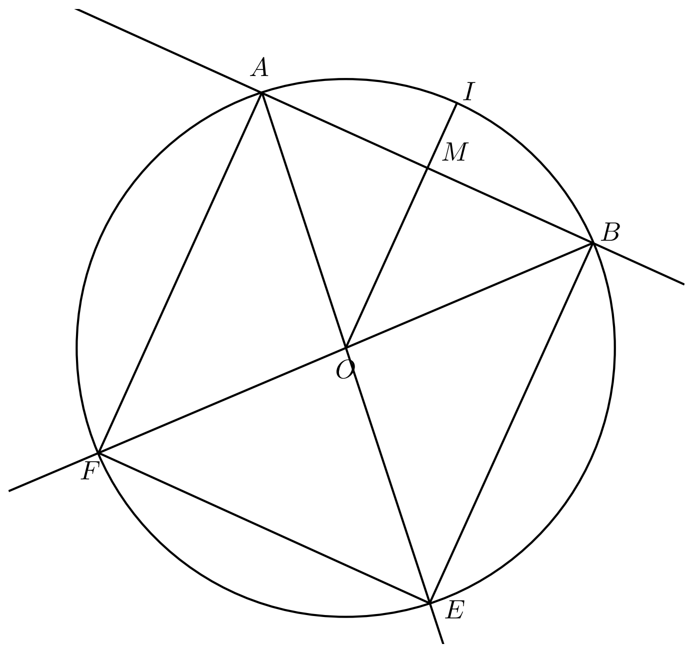
x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		1
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

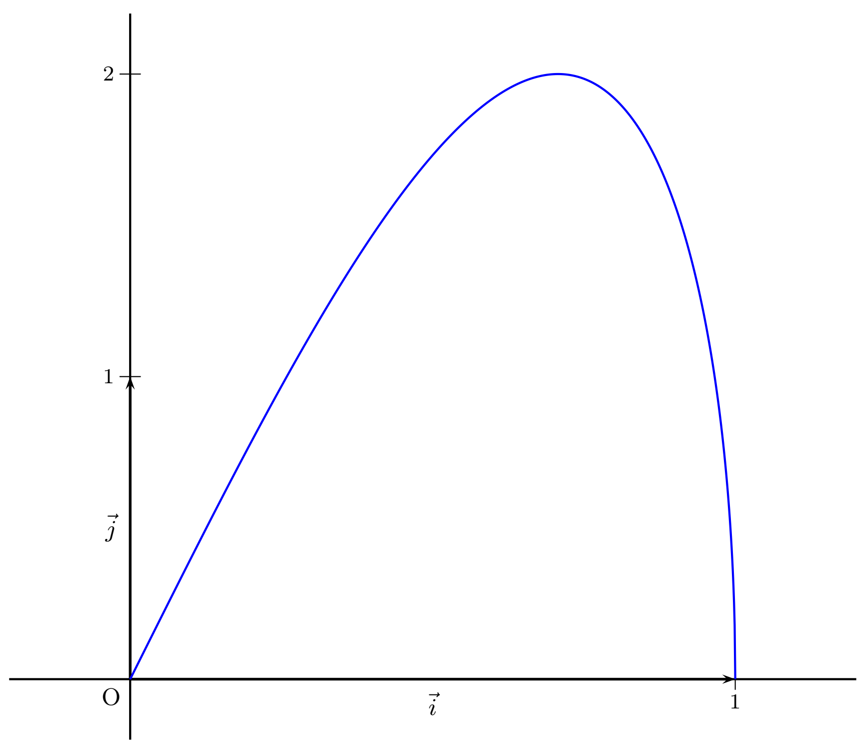
Ainsi on a bien démontré que $\mathscr{A}$ admet 2 pour maximum atteint en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. De plus si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $OM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et donc
$$AF = \sqrt{2}$$

De plus
$$AB = 2\sqrt{1-x^2}2\sqrt{1-\frac{2}{4}} = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ainsi $AB = AF$ et le rectangle $ABEF$ est donc un carré.





Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous

1. En faisant apparaître les traits de construction, utiliser le graphique pour :

a. $f(0) = -6$ et $f(2) = 0$

b. -7 n'a pas d'antécédents et -4 en a 2, qui sont -2 et 1

c. L'équation $f(x) = 6$ admet deux solutions -4 et 3

2. Dans cette question, il s'agit de justifier les résultats à l'aide de calculs

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 6,25 = x^2 + x - 6 = f(x)$$

b. Sur $[-4; -0,5]$, considérons deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned}
& -4 \leq a < b \leq -0,5 \\
\iff\ & -3,5 \leq a + \frac{1}{2} < b + \frac{1}{2} \leq 0 \\
\iff\ & (-3,5)^2 \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 > \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ car on élève des nombres négatifs au carré} \\
\iff\ & (-3,5)^2 - 6,25 \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 > \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 \geq -6,25 \\
\iff\ & (-3,5)^2 - 6,25 \geq f(a) > f(b) \geq -6,25
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $[-4; -0,5]$
Sur $[-0,5; 4]$, considérons deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned}
& -0,5 \leq a < b \leq 4 \\
\iff\ & 0 \leq a + \frac{1}{2} < b + \frac{1}{2} \leq 4,5 \\
\iff\ & (0 \leq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4,5^2 \text{ car on élève des nombres positifs au carré} \\
\iff\ & -6,25 \leq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 < \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 \leq 4,5^2 - 6,25 \\
\iff\ & f(a) < f(b)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur $[-0,5; 4]$

c.

x	-4	$-\frac{1}{2}$	$+4$
$f(x)$	6 $\searrow$	-6.25	$\nearrow$ 14

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on sait que :

$$\begin{array}{ll} & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ \iff & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 6,25 \geq -6,25 \\ \iff & f(x) \geq -6,25 \end{array}$$

De plus on a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6,25$, par conséquent le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-6,25$

e. On cherche les réels x qui ont pour image -6

$$\begin{array}{ll} & f(x) = -6 \\ \iff & x^2 + x - 6 = -6 \\ \iff & x^2 + x = 0 \\ \iff & x(x+1) = 0 \\ \iff & x = 0 \text{ ou } x = -1 \end{array}$$

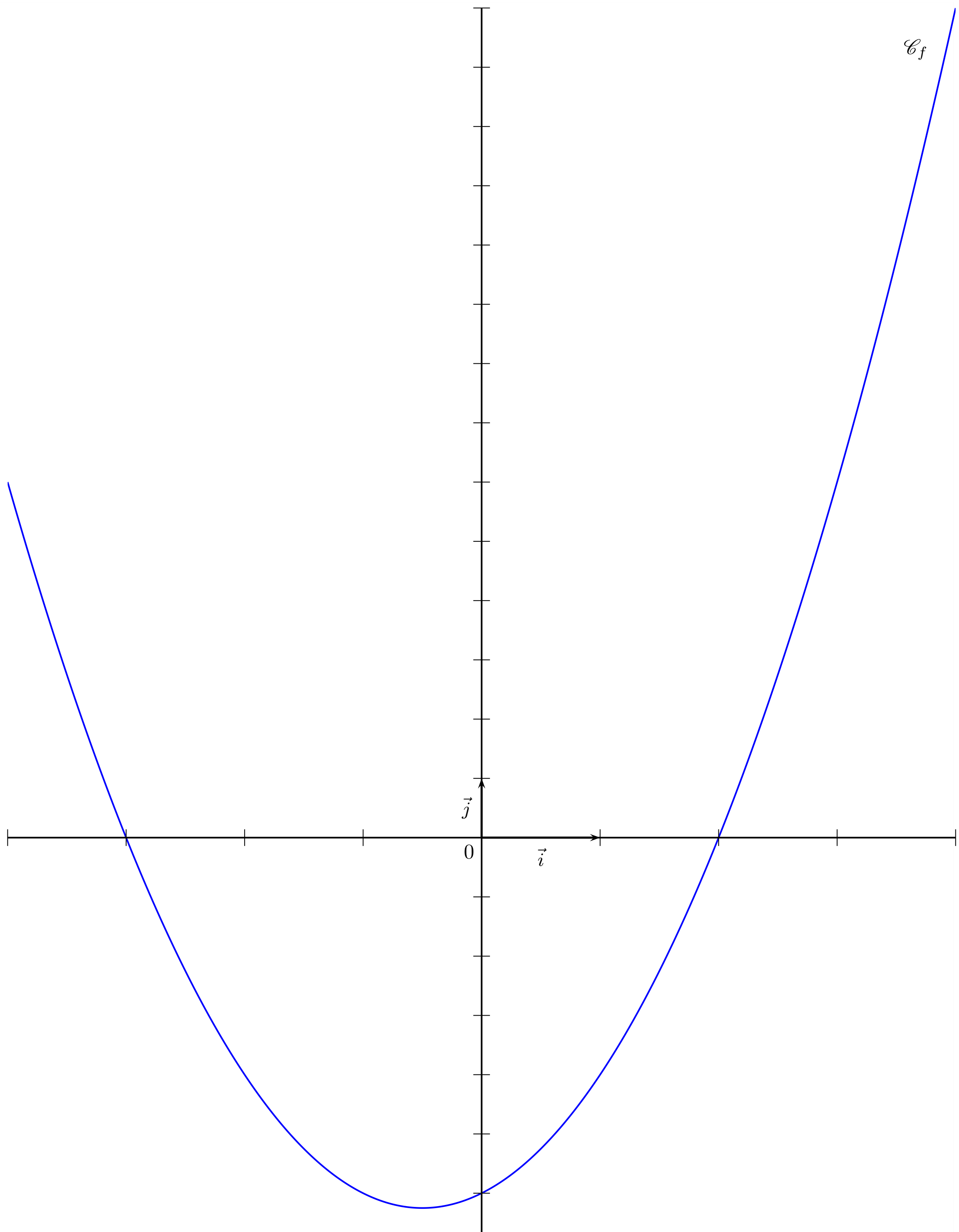
-6 a donc deux antécédents qui sont 0 et -1

f. $(x-2)(x+3) = x^2 + 3x - 2x + 6 = x^2 + x + 6$

3. Résolvons l'inéquation $f(x) \leq 0$, pour cela construisons le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$			$-$		0	$+$	
$x+3$		$-$	0		$+$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-3; 2]$, la courbe étant sous l'axe des abscisses uniquement pour des valeurs de x dans $[-3; 2]$, le résultat est cohérent avec le graphique.


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
0
$\vec{i}$