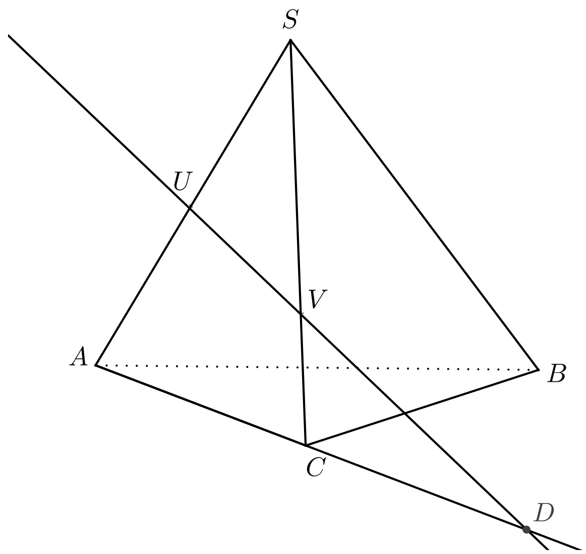
Correction du devoir Maison 3

Exercice 1. *Intersection plans droites* (4 points)
Deux points U et V appartenant aux côtés $[SA]$ et $[SB]$ d'un tétraèdre $SABC$ tels que la droite (UV) n'est pas parallèle au plan de base (ABC).

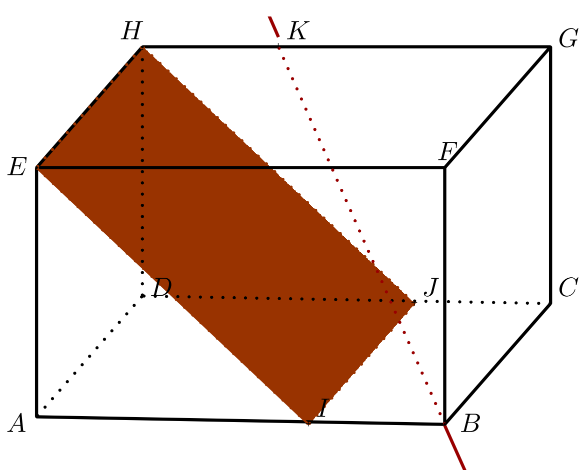
1. Réaliser une figure
2. L'intersection entre la droite (UV) et le plan (ABC) est un point, puisque la droite (UV) n'est pas parallèle au plan (ABC) par hypothèse.
   Déterminons ce point. Les droites (UV) et (AB) sont contenues dans le plan (SAB), de plus elles ne sont pas parallèles (sinon (UV) serait parallèle au plan (ABC)), par conséquent elles sont sécantes en un point D. Comme $D \in (AB)$, D est un point du plan (ABC), et par conséquent D est l'intersection cherchée.



Exercice 2. *Droite parallèle à un plan* (5 points)
Dans un pavé droit $ABCDEFGH$, on place les points I, J et K respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[CD]$ et $[GH]$ tels que :

$$BI = CJ = HK$$

1. On sait que $BI = HK$, de plus comme $ABCDEFGH$ est un pavé $(BI)//(HK)$, par conséquent le quadrilatère $IBKH$ est un parallélogramme.
2. Les droites (BK) et (IH) sont parallèles puisque le quadrilatère $IBKH$ est un parallélogramme.
3. La droite (BK) est parallèle à une droite du plan (HIJ) (la droite (IH) donc elle est parallèle au plan (HIJ).



Exercice 3. *Intersection plans plans* (4 points)

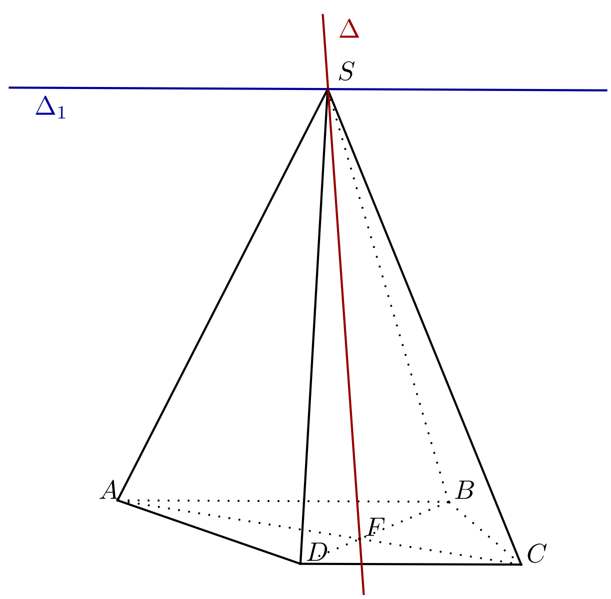
Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze avec $(AB)//(CD)$. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD), puis des plans (SAB) et (SCD).

– **Intersection des plans (SAC) et (SBD)**
  L'intersection entre les plans (SAC) et (SBD) est une droite.
  On cherche deux points de cette droite.
  Le premier est évident, il s'agit du point S, commun donc aux deux plans (SAC) et (SBD), trouvons un autre point commun à ces deux plans.
  De plus comme $ABCD$ est un trapèze, les droites (AC) et (BD) sont sécantes en un point F. Ce point F est à la fois sur (AC) et sur (BD) donc aussi sur (SAC) et sur (SBD). Ainsi on a :

$$(SAC) \cap (SBD) = (FS) = \Delta$$

– **Intersection des plans (SAB) et (SCD)**
  L'intersection entre les plans (SAB) et (SCD) est une droite.
  Cette droite passe par le point S, commun donc aux deux plans (SAB) et (SCD).
  De plus la droite Δ_1 parallèle à (AB) passant par S est une droite du plan (SAB). Comme $(AB)//(CD)$ la droite Δ_1 est aussi une droite du plan (SCD), on a donc :

$$(SAB) \cap (SBD) = \Delta_1$$



Exercice 4. *Calcul dans l'espace* (7 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux). Soient I, J, et K les milieux respectifs de $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$.

1. D'après le théorème des milieux, la droite passant par I et J (milieux de deux côtés du triangle ADB) est parallèle au troisième côté, ici (AB), de plus
$$IJ = \frac{AB}{2}$$
2. On vient de le faire dans la question précédente, le théorème des milieux donne en plus du parallélisme l'égalité de longueur suivante :
$$IJ = \frac{AB}{2}$$
3. En raisonnant de la même manière que dans les deux premières questions on a aussi :
$$JK = \frac{1}{2}BC \qquad \text{et} \qquad IK = \frac{1}{2}AC$$

On a

$$\mathscr{P}' = IJ + JK + IK = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}\mathscr{P}$$

4. Le triangle IJK est une réduction du triangle ABC coefficient $\frac{1}{2}$, par conséquent on a :

$$\mathscr{A}' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathscr{A} = \frac{1}{4}\mathscr{A}$$

5. Le triangle IJK est une réduction du triangle ABC coefficient $\frac{1}{2}$, par conséquent on a :

$$\mathscr{V}' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \mathscr{V} = \frac{1}{8}\mathscr{V}$$