Correction du devoir Maison 2

Exercice 1. *Résoudre un problème* (4 points)
Pour noël, un patissier compte fabriquer 50 choux à la crème et 70 éclairs au chocolat. Pour les commercialiser, il a l'intention de les présenter en lots, qui comporteront tous le même nombre de choux et d'éclairs. Pour des raisons esthétiques, il s'interdit de proposer à la vente des lots obtenus en partageant un choux ou un éclair.
On appelle N le nombre de lots de composition identique qu'il peut ainsi réaliser.

1. On veut un nombre entier de choux à la crème et d'éclairs dans chaque lot. Si x est le nombre de lots, on aura $\dfrac{50}{x}$ choux et $\dfrac{70}{x}$ éclairs par lot.
   $\dfrac{50}{x}$ et $\dfrac{70}{x}$ doivent être des nombres entiers donc x est un diviseur de 50 et de 70.
2. Le plus grand nombre de lots est le plus grand diviseur commun de 50 et de 70 i.e le $PGCD$ de 50 et de 70. Comme $70 = 50 \times 1 + 20$, puis $50 = 20 \times 2 + 10$ puis $20 = 10 \times 2 + 0$. Le $PGCD$ est le dernier reste non nul (d'après l'algorithme d'Euclide i.e 10. $N = 10$ est bien le nombre maximal. Dans chaque lot, on trouvera donc 5 choux à la crème et 7 éclairs au chocolat.

Exercice 2. *Un nouvel ensemble stable pour les* 4 *opérations* (6 points)
On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ un nouvel ensemble définie par :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \text{ tel que } a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}\}$$

1. Notons $u = 1 + \sqrt{2}$ et $v = \sqrt{2}$ sont deux nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ qui ne sont pas des nombres décimaux (leur écriture décimale ne s'arrête jamais).
2. On a $u + v = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$, puis
$$u - v = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1$$
   puis $u \times v = (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2$ et enfin
$$\frac{u}{v} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$
3. Dans un premier temps comme $\mathbb{R}$ est l'ensemble « le plus gros possible »on a forcément $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$
   De plus si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = q + 0\sqrt{2}$ est de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a = q \in \mathbb{Q}$ et $b = 0 \in \mathbb{Q}$ donc $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ce qui prouve que
$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Exercice 3. *On connait la somme et le produit* (4 points)
Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $\mathscr{A} = 12$ m^2.
Le but du problème est de déterminer les dimensions du rectangle. Pour cela, notons x et y les dimensions de ce rectangle.

1. Comme $P = 14$ on a :
$$2x + 2y = 14 \iff x + y = 7 \iff y = 7 - x$$
2. Comme $\mathscr{A} = 12$ on a :
$$xy = 12 \iff x(7-x) = 12 \iff 7x - x^2 - 12 = 0 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$$
3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$$

4. On résout l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$ à l'aide de la question précédente, en effet :

$$\begin{array}{rrcl} & & x^2 - 7x + 12 = 0 & \\ \iff & & (x-3)(x-4) = 0 & \\ \iff & x - 3 = 0 & \text{ou} & x - 4 = 0 \\ \iff & x = 3 & \text{ou} & x = 4 \end{array}$$

Lorsque $x = 3$ alors $y = 7 - 3 = 4$ et lorsque $x = 4$ alors $y = 7 - 4 = 3$, par conséquent la largeur du rectangle est de 3 m et la longueur est de 4 m.

Exercice 4. *Un peu d'arithmétique* (6 points)
On considère un nombre $A = 4n + 2$ où n désigne un entier naturel.

1. Calculer A pour $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 7$.

Pour $n = 0$	Pour $n = 1$	Pour $n = 2$	Pour $n = 7$
$A = 0 + 2 = 2$	$A = 4 + 2 = 6$	$A = 8 + 2 = 10$	$A = 28 + 2 = 30$

2. Un nombre A est pair si on peut l'écrire sous la forme $2k + 1$ où k désigne un nombre entier naturel.
   Or, $A = 4n + 2 = 2(2n + 1)$ $k = 2n + 1$ désigne un entier naturel par conséquent k est pair.
3. A n'est pas un multiple de 4 si on peut l'écrire sous la forme $A = 4k$ où k désigne un entier naturel.
   Or, $A = 4n + 2 = 4\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, mais $n + \dfrac{1}{2}$ n'est pas un entier, par conséquent A n'est pas un multiple de 4.
4. Soit k un nombre entier.
   (a) Si k est pair alors $k = 2n$ avec n entier naturel. Par conséquent $k^2 = (2n)^2 = 4n^2$ avec n^2 entier, donc k^2 est un multiple de 4.
   (b) Si k est impair alors $k = 2n + 1$ avec n entier naturel et
   $$k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$
   k^2 est un nombre pair auquel on a ajouté 1 i.e k^2 est un nombre impair.
   (c) D'après la question 4.(a) on a montré que si k est pair, alors k^2 est un multiple de 4 et à la question 3. on a montré que A n'est pas un multiple de 4 donc A ne peut pas être le carré d'un nombre pair.
   De plus d'après la question 4.(b) on a montré que si k est impair alors k^2 est aussi impair et à la question 2. on a montré que A est pair, donc A ne peut pas être non plus le carré d'un nombre pair.
   Au final A n'est le carré d'aucun nombre entier (i.e montrer que $4n + 2 \neq k^2$ quelque soit l'entier k).

Exercice 5. *Défi* (3 points)
On considère un nombre premier $p > 3$.
Notons dans un premier temps que

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

Comme p est un nombre premier supérieur à 3, p n'est pas pair, par conséquent $p - 1$ ET $p + 1$ sont tous deux pairs. Il en résulte que le produit $(p - 1)(p + 1)$ est un multiple de 4 (puisque le produit de deux nombres pairs).
De plus $p - 1$, p et $p + 1$ sont trois nombres entiers consécutifs, par conséquent parmi eux figure exactement un multiple de 3. Comme p est premier et comme p est supérieur à 3, p n'est pas un multiple de 3, par conséquent soit $p - 1$ soit $p + 1$ est un multiple de 3. Il en résulte que $p^2 - 1$ est un multiple de 3 et de 4, donc de 12.