Correction du devoir Maison 1

Exercice 1. *Factoriser-Développer* (2 points)
Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?
Si on pouvait écrire $x^2 - 3x + 4$ sous la forme $(x+1)(ax+b)$, l'égalité serait vraie pour tout x.
Or pour $x = -1$, on a d'une part

$$x^2 - 3x + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$$

Et d'autre part

$$(x+1)(ax+b) = 0$$

Par conséquent une telle écriture est impossible.
On pouvait aussi procéder par identification i.e :

$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + bx + ax + b = ax^2 + (a+b)x + b$$

Pour pouvoir écrire $x^2 - 3x + 4$ sous la forme voulue il faut que $a = 1$, $b = 4$ et $a + b = -3$.
Or dans ce cas $a + b = 5 \neq -3$ et rend donc impossible une telle écriture.

Exercice 2. *Un peu de calcul !* (6 points)

1.

$$\begin{aligned}\frac{25^{-2} \times \left(15^3\right)^6}{9^4 \times (-5)^3} &= -\frac{15^{18}}{25^2 \times 3^8 \times 5^3} \\ &= -\frac{5^{18} \times 3^{18}}{5^4 \times 3^8 \times 5^3} \\ &= -\frac{5^{18} \times 3^{10}}{5^7} \\ &= -5^{11} \times 3^{10}\end{aligned}$$

On trouve :

$$\boxed{\frac{25^{-2} \times \left(15^3\right)^6}{9^4 \times (-5)^3} = -5^{11} \times 3^{10}}$$

2.

$$A = (2x+1)^2 - (2x+1) = (2x+1)(2x+1-1) = 2x(2x+1)$$

La forme factorisée de A est donc :

$$\boxed{A = 2x(2x+1)}$$

$$B = (4x+3)(x+5) + 16x^2 + 24x + 9 = (4x+3)(x+5) + (4x+3)^2 = (4x+3)[(x+5) + (4x+3)] = (4x+3)(5x+8)$$

La forme factorisée de B est donc :

$$\boxed{B = (4x+3)(5x+8)}$$

3.

$$A = 14\sqrt{50} - 8\sqrt{72} + \sqrt{2} + \sqrt{32} - 15 = 14\sqrt{25 \times 2} - 8\sqrt{2 \times 36} + \sqrt{2} + \sqrt{2 \times 16} - 15 = 70\sqrt{2} - 48\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 15 = -15 + 27\sqrt{2}$$

Au final

$$\boxed{A = -15 + 27\sqrt{2}}$$

<u>Exercice</u> 3. *Vitesse Moyenne* (6 points)

1. Un cycliste effectue l'ascension d'une côte à 10 km.h^{-1} et la redescend à 40 km.h^{-1}.
   Quelle est sa vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours ? [1]
   <u>Cas Particulier</u> : La longueur de la côte est de 10 km.
   Pour la montée il faut 1 heure, en effet :

$$v = \frac{d}{t} \iff 10 = \frac{10}{t} \iff 10t = 10 \iff t = 1$$

   Pour la descendre il faut 1/4 d'heure, en effet :

$$v = \frac{d}{t} \iff 40 = \frac{10}{t} \iff 40t = 10 \iff t = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

   Au final le cycliste a parcouru 20 km en $1h1/4$. Sa vitesse moyenne est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{20}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{5}{4}} = \frac{20 \times 4}{5} = 16 \text{ km.h}^{-1}$$

   <u>Cas Général</u> : La longueur de la côte est de d km.
   Pour la montée il faut $\frac{d}{10}$ heure, en effet :

$$v = \frac{d}{t} \iff 10 = \frac{d}{t} \iff 10t = d \iff t = \frac{d}{10}$$

   Pour la descendre il faut $\frac{d}{40}$ heure, en effet :

$$v = \frac{d}{t} \iff 40 = \frac{d}{t} \iff 40t = d \iff t = \frac{d}{40}$$

   Au final le cycliste a parcouru $2d$ km en $\frac{d}{10} + \frac{d}{40} = \frac{4d + d}{40} = \frac{5d}{40} = \frac{d}{8}$ heure. Sa vitesse moyenne est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2d}{\frac{d}{8}} = \frac{2d \times 8}{d} = \frac{16d}{d} = 16 \text{ km.h}^{-1}$$

   Par conséquent la vitesse moyenne de note cycliste est

$$\boxed{v = 16 \text{ km.h}^{-1}}$$

2. On dit qu'un réel x est la *moyenne harmonique* de deux nombres a et b si et seulement si

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

1. On pourra raisonner sur une côte d'une longueur de 10 km.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{ab}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{x}=\frac{a+b}{2ab}\\
\Longleftrightarrow\quad & x(a+b)=2ab\\
\Longleftrightarrow\quad & x=\frac{2ab}{a+b}
\end{aligned}$$

Au final on trouve que

$$\boxed{x=\frac{2ab}{a+b}}$$

3. Si $a=10$ et $b=40$ alors
$$x=\frac{2\times 10\times 40}{10+40}=\frac{800}{50}=\frac{80}{5}=16$$
Autrement dit la vitesse moyenne du cycliste est la moyenne harmonique des deux vitesses du cycliste !

Exercice 4. *Utiliser un résultat* (6 points)

1. $$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

2. $$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{9\times 10}\\
&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\\
&\quad +\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\\
&= 1-\frac{1}{10}\\
&= \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}+\frac{1}{n\times(n+1)}\\
&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{n+1}\\
&= \frac{n+1-1}{n+1}\\
&= \frac{n}{n+1}\qquad CQFD
\end{aligned}$$

Exercice 5. *Trouver la tache !* (**Bonus** - 3 points)

Retrouver le nombre caché sous la tache :

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{\ast}$$

On a donc :

$$\frac{1}{\ast}=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{40}-\frac{1}{50}-\frac{1}{60}$$

i.e :

$$\frac{1}{\ast}=\frac{15}{60}-\frac{6}{60}-\frac{3}{60}-\frac{2}{60}-\frac{1}{40}-\frac{1}{50}-\frac{1}{60}=\frac{3}{60}-\frac{1}{40}-\frac{1}{50}$$

donc :

$$\frac{1}{\ast}=\frac{1}{20}-\frac{5}{200}-\frac{4}{200}=\frac{10}{200}-\frac{9}{200}=\frac{1}{200}$$

Au final :

$$\boxed{\ast = 200}$$

Exercice 6. *Qui s'y frotte s'y pique !* (**Bonus** - 3 points)

Á l'aide des quatre opérations élémentaires (éventuellement des parenthèses) et en utilisant une seule fois les nombres 1, 5, 6 et 7, trouver 21.

On a bien

$$\frac{6}{1-\frac{5}{7}}=\frac{6}{\frac{2}{7}}=6\times\frac{7}{2}=3\times 7=21$$