Leçon 4

Probabilité et Simulation

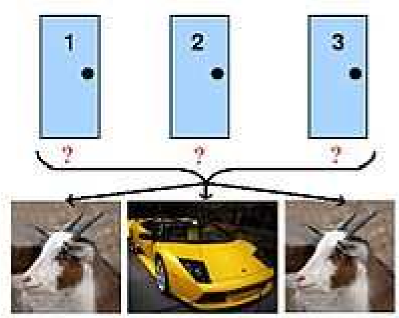
Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI$^{\text{ème}}$ siècle pour qu'on s'intèresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
De nos jours et à niveau plus élevé, ces calculs sont abondamment utilisés en physique, en chimie, en biologie, en économie, en démographie, etc. Ils permettent de « prévoir » des événements (en probabilité, ce qui n'est donc pas forcément cer tain), tels que le temps qu'il fera, la croissance de la population, l'évolution des maladie, l'espérance du temps d'attente d'un bus, l'espérance de vie suivant certains paramètres, etc. Malgré tout, le vocabulaire employé reste lié au jeu.

Problèmes d'introduction

Le problème de Monty Hall est un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain Let's Make a Deal. Il est simple dans son énoncé mais non intuitif dans sa résolution et c'est pourquoi on parle parfois à son sujet de paradoxe de Monty Hall. Il porte le nom de celui qui a présenté ce jeu aux États-Unis pendant treize ans, Monty Hall.

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance). Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.



Les questions qui se posent au candidat sont :
– Que doit-il faire ?
– Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Problème :
A votre avis, quelle est la probabilité que sur l'ensemble des élèves de seconde du lycée, deux personnes aient leur anniversaire le même jour de l'année ? Dans un groupe de 60 personnes ? Dans un groupe de 30 personnes ?
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

I) Choix d'un modèle

Définition 1 :

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue est incertaine

Remarque : On cherche à trouver un modèle afin de pouvoir prévoir avec le plus de certitude possible les résultats de cette expérience

I-1 L'univers

Il représente l'ensemble toutes les issues envisagées de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation a priori que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemple :

- On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P;F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$
- Remarquons que l'univers dépend de l'observation qui est faite : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux numéros obtenus, on obtient respectivement :

$$\Omega_P = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;15;16;18;20;21;24;25;30;36\}$$

$$\Omega_S = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

Notons enfin qu'il existe des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :

- On choisit un entier naturel au hasard : $\Omega = \mathbb{N}$
- On lance une pièce, on s'arrete au premier pile, on compte le nombre de pièces lancers. L'univers est $\Omega = \mathbb{N}$.
- On choisit un réel au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0;1]$

I-2 Evénement

Il s'agit des issues discernables ou mesurables par l'observateur. Lorsque l'univers Ω est fini, chaque partie de l'univers peut être considérée comme un événement. On étudiera toujours des cas où l'univers est fini.

I-2.1 Eventualité

Définition 2 :

Une éventualité est une issue, un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple :

- Lancer d'une pièce de monnaie. Pile est une éventualité.
- Lancer d'un dé. 3 est une éventualité.
- Une urne contient 2 boules noires et une boule blanche. On tire une boule, alors obtenir une boule blanche est une éventualité.

I-2.2 Evénement

Définition 3 :
Lors d'une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini. Un événement est un ensemble constitué d'éventualité i.e un événement est un sous ensemble de l'univers.

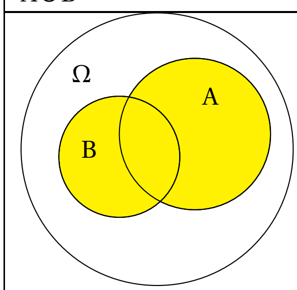
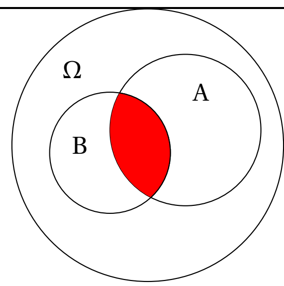
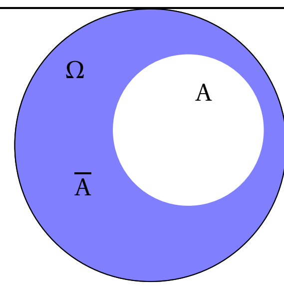
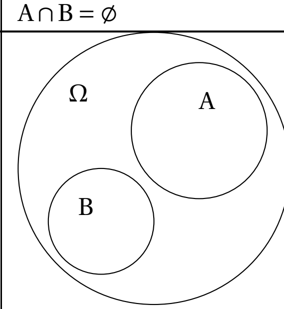
Exemple :

– Lancer de deux pièces de monnaie. L'univers $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$, un événement A est par exemple obtenir deux fois le même résultat i.e

$$A = \{PP; FF\}$$

– Lancer d'un dé. $\{1; 2; 3\}$ est un événement. On peut le résumer par la phrase « obtenir un score inférieur ou égal à 3 »

I-2.3 Opérations sur les événements

Réunion de A **et** B **:** $A \cup B$	**Intersection de** A **et** B **:** $A \cap B$	**Complémentaire de** A **:** $\bar{A}$	A **et** B **sont disjoints** : $A \cap B = \emptyset$
			

Exemple :
On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	**Signification**	**Illustration**
L'univers Ω, événement **certain**	L'ensemble des éventualités	$\Omega =$
L'ensemble vide $\emptyset$, événement **impossible**	L'ensemble qui ne contient aucune éventualité	
Éventualité	L'un des résultats de l'exprérience	Obtenir 7 : $\omega =$
Événement	Sous ensemble de l'univers	Obtenir un nombre pair : $A = \ldots$; ou obtenir une somme inférieure à 4 : $B =$
Événement A **et** B, $A \cap B$	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B =$
Événement A **ou** B, $A \cup B$	Événement constitué de toutes les issues possibles des 2 événements	$A \cup B =$
Événement **incompatibles** ou **disjoints**, on note $A \cap B = \emptyset$	Ce sont des événements qui n'ont aucunes issues en commun	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \emptyset$
Événement **contraire** ; le contraire de A se note $\bar{A}$	Ce sont 2 événements incompatibles dont la réunion forme l'univers	$\bar{A} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $A \cap \bar{A} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $A \cup \bar{A} = \ldots\ldots\ldots$

Exercice 1 :

On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.

I-3 Loi de probabilité

Définition 4 :

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω est de cardinal fini n.
P est une loi de probabilité si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. P est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ [a] à valeurs dans $[0;1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toutes parties A et B disjointes ($A \cap B = \emptyset$) (i.e A et B sont deux événements incompatibles).

a. $\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω

Remarques :

– $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Longleftrightarrow P(\emptyset) = 0$
– La première propriété traduit le fait que la probabilité d'un événement A est telle que :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

– Enfin grâce à la propriété 3, **la probabilité** P(E) **d'un événement** E **est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.**
– Modéliser une expérience aléatoire revient à définir un univers Ω, l'ensemble des parties de Ω (i.e les événements relatifs à cet univers) et une loi de probabilité P.

Exemple :

On s'intéresse au résultat d'un dé cubique lorsqu'on le lance. L'expérience a 6 issues possibles et donc l'univers Ω est :

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$$

Dans le cas d'un dé parfaitement cubique, chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître et on choisira comme loi de probabilité celle qui a chaque éventualité associe le nombre $\dfrac{1}{6}$
Considérons un dé ou tous les nombres ont les mêmes chances d'apparitions sauf 1 et 2 qui apparaîssent deux fois plus souvent. La loi de probabilité convenant à cette expérience est telle que :

$$p_1 = p_2 = 2p_3 = 2p_4 = 2p_5 = 2p_6 \qquad \text{Notons } a = p_3\text{, alors } p_1 = 2a$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

on a $2a + 2a + a + a + a + a = 1 \Longleftrightarrow 8a = 1 \Longleftrightarrow a = \dfrac{1}{8}$
Au final on peut résumer la loi de probabilité que l'on choisira pour modéliser cette expérience dans le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exercice 2 :

Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	?

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 »
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 »
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier »

Définition 5 :
La probabilité P(E) d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

II) Comment choisir un modèle

II-1 A l'aide de l'énoncé

Définition 6 :
Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité sur l'univers Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Remarque : Dans une grande partie des cas, l'énoncé d'un problème est suffisament clair pour choisir une loi de probabilité crédible au regard de l'expérience aléatoire que l'on étudie.

Si, par exemple, on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, alors on choisit $P(\text{« } pile \text{ »}) = \frac{1}{2} = P(\text{« } face \text{ »})$. Dans la réalité il n'existe probablement aucune pièce parfaitement équilibrée, cependant avec le modèle que l'on vient de choisir on est sûrement très proche de la réalité de notre pièce pour s'en satisfaire pleinement.

Exemple :

Dans un verger, on trouve deux fois plus de pommiers donnant des pommes rouges et que de pommiers donnant des pommes vertes (et c'est tout).
On cherche la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes Rouge.
Appelons P(R) cette probabilité et P(V) celle de choisir un pommier donnant des pommes vertes.
Alors on sait que $P(R) = 2P(V)$. De plus $P(R) + P(V) = 1$.
On a donc $2P(V) + P(V) = 1 \Longleftrightarrow 3P(V) = 1 \Longleftrightarrow P(V) = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{2}{3}$.

II-2 Simulation

On dispose d'une pièce de monnaie et on souhaite savoir si elle est bien équilibrée. Mais comment le savoir ?
On la lance 50 fois (à la main, plus devient fastifieux). On a obtenu 30 Fois pile et 20 fois Face.
Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est équilibrée ?

En fait, on ne peut jamais être sûr de rien, mais d'un point de vue statistique, on peut avoir une idée de la réponse, avec une certaine marge d'erreur, grâce aux simulations.

Définition 7 :

Un échantillon (aléatoire) de taille n est la liste des résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

Exemple :

Ici notre échantillon est de taille 50 et comporte 30 Pile et 20 Face. Nous avons observé dans cet exemple une fréquence de « Pile » qui vaut $f_p = \frac{3}{5}$ et une fréquence de « Face » qui vaut $f_f = \frac{2}{5}$. On se demande s'il s'agit du hasard et qu'il est raisonnable d'estimer que la probabilité d'obtenir pile avec cette pièce de monnaie est $\frac{1}{2}$. Le résultat suivant que l'on admet permet de décider :

Théorème 1 :

Dans une population, la proportion d'un caractère est p. On produit un échantillon de taille n de cette population et on observe une fréquence f du caractère dans l'échantillon.
Si p est compris entre $0,2$ et $0,8$ et si n est supérieur ou égalà 25, alors dans 95% des cas au moins, f appartient à l'intervalle :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

que l'on appelle **intervalle de fluctuation** au seuil 95% (ou seuil $0,95$).

Exemple :

Ici donc notre échantillon est de taille 50, et la fréquence de pile que l'on a observé vaut $\frac{3}{5}$.
L'intervalle de fluctuation est : $0,5 - \frac{1}{\sqrt{[50}} \simeq 0,36$ et $0,5 + \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0,64$ Le théorème précédent assure que si on effectue la même expérience avec une pièce qui est parfaitement équilibrée alors dans au moins 95% on observa une fréquence de pile comprise $0,36$ et $0,64$.
Notre observation est donc « fréquente » pour une pièce bien équilibrée, par conséquent on a aucune raison de refuser l'hypothèse « la pièce est bien équilibrée. »

Exercice 3 :

Dans une commune de plus de 50000 habitants, la proportion de femmes est $0,5$. Le conseil municipal est composé de 43 personnes donc 17 femmes.
Peut-on affirmer qu'au conseil municipal, la parité des sexes n'est pas respectée ?

Exercice 4 :

Dans une population de truites de rivière, le sex ration (proportion de mâles et de femelles) est de $0,5$ pour chaque sexe. Certaines poluutions par des produits pharmaceutiques modifient ce sex ration en augmentant la proportion de femelles. Sur un prélèvement de 100 truites de rivière, on a relevé une fréquence de femelles égale à $0,64$.
Peut-on considérer que cela est dû au seul hasard ou bien doit-on suspecter une pollution ?

Exercice 5 :
Lors d'un sondage effectué auprès de 900 personnes, 51% d'entre elles déclarent vouloir voter pour le candidat A. En supposant que les personnes sondées ont répondu sincèrement et qu'elles ne changeront pas d'avis le jour du vote, le candidat A peut-il raisonnablement penser qu'il sera élu au premier tout (c'est-à-dire avec plus de 50% des voix) ?
Pour cela on montrera que $0,48 \leq p \leq 0,54$.

III) Propriété des probabilités

III-1 Quelques propriétés

Propriété 1 :
Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Preuve
Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des éléments de B. Puisque A et B sont disjoints, $A \cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A) + P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A \cup B$, i.e $P(A \cup B)$

Corollaire 1 :
– La probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ de A est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
– Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

Preuve
– On a $\bar{A} \cup A = \Omega$ et $\bar{A} \cap A = \emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \Longleftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

– Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B - A)$, où $B - A$ est l'ensemble des éventualités de B qui ne sont pas dans A. On a aussi $A \cap (B - A) = \emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Théorème 2 :
La propabilité de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve
Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A - B) \cup B$ et comme $(A - B) \cup B = \emptyset$, il vient :

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

Exemple :

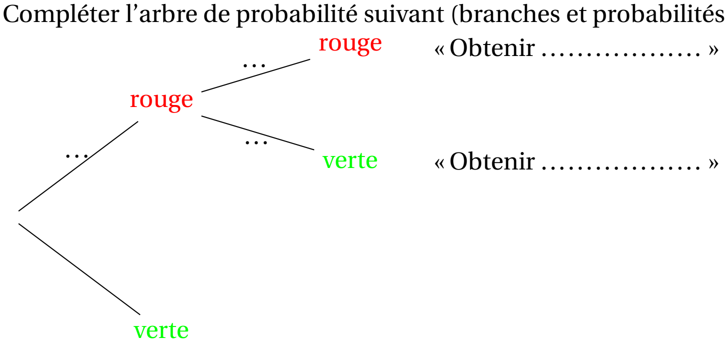
Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

III-2 Règle de calcul sur les arbres

Travail de l'élève : Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant (branches et probabilités correspondantes), qui modélise l'expérience :



2. Calculer les probabilité des événements suivants :
   - A = « Tirer deux boules rouges »
   - B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
   - C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
   - D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
   - E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
   - F = « Tirer deux boules de la même couleur »
   - G = « Tirer au moins une boule vertes ?

Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.
Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exercice 6 :

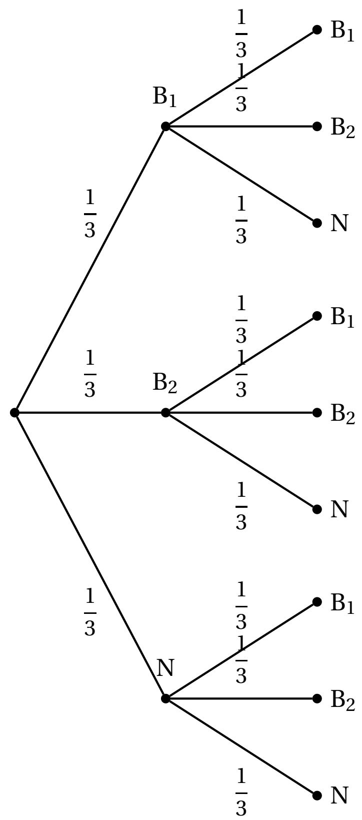
On considère une urne contenant 2 boules noires et 1 boule blanche, indiscernable au toucher. On tire successivement deux boules de cette urne avec remise.

1. Modéliser cette expérience aléatoire.
2. On considère l'événement E : « tirer deux boules blanches ». et l'événement F : « tirer deux boules de couleurs identiques ».
   (a) Calculer P(E) et P(F).
   (b) Définir $E \cup F$, $E \cap F$ et $\overline{E}$.
   (c) En déduire $P(E \cup F)$, $P(E \cap F)$ et $P(\overline{E})$.

Solutions :

Pour décrire l'univers Ω on peut utiliser un arbre, on va procéder de deux manières différentes.
Dans le premier cas on note B_1 le fait de tirer l'une des boules blanches et B_2 le fait de tirer l'autre puis enfin N le fait de tirer la boule noire.
Dans le second cas on note B le fait de tirer une boule blanche et N le fait de tirer la boule noire.

1. Premier cas :



L'univers Ω est alors constitué de 9 événements élémentaires (ou éventualités), chacune a la même probabilité d'apparition (on dit qu'on est dans un cas d'**équiprobabilité**), ainsi on a

$$\Omega = \{B_1B_1; B_1B_2; B_1N; B_2B_1; B_2B_2; B_2N; NB_1; NB_2; NN\}$$

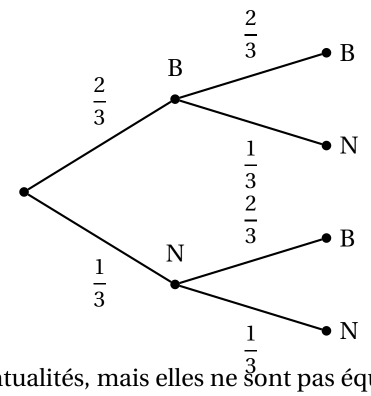
et le tableau suivant définit la loi de probabilité associé à cette expérience :

Eventualité	B_1B_1	B_1B_2	B_1N	B_2B_1	B_2B_2	B_2N	NB_1	NB_2	NN	Total
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. (a) $P(E) = P(B_1B_2) + P(B_1B_1) + P(B_2B_1) + P(B_2B_2) = \frac{4}{9}$ et $P(F) = P(A) + P(NN) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
   (b) $E \cup F = F$, $E \cap F = E$ et $\overline{E} = \{B_1N; B_2N; NB_1; NB_2; NN\}$
   (c) On en déduit immédiatement que $P(E \cup F) = \frac{5}{9}$, $P(E \cap F) = \frac{4}{9}$ et $P(\overline{E}) = \frac{5}{9}$

Solutions :

1. Deuxième cas :



L'univers Ω est ici constitué de 4 éventualités, mais elles ne sont pas équiprobables comme dans le cas précédent.

$$\Omega = \{BB; BN; NB; NN\}$$

Pour calculer leur probabilité, en s'aidant du premier cas, on constate qu'il suffit de multiplier les probabilité sur chacune des branches. Par exemple la probabilité de l'éventualité BB est $P(BB) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ce qui correspond bien au résultat trouvé dans le premier cas.
On établit alors le tableau suivant définissant la loi de probabilité associé à cet univers :

Eventualité	BB	BN	NB	NN	Total
Probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. (a) $P(E) = P(BB) = \frac{4}{9}$ et $P(F) = P(BB) + P(NN) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

   (b) $E \cup F = F$, $E \cap F = E$ et $\overline{E} = \{BN; NB; NN\}$

   (c) On en déduit immédiatement que $P(E \cup F) = \frac{5}{9}$, $P(E \cap F) = \frac{4}{9}$ et $P(\overline{E}) = P(BN) + P(NB) + P(NN) = \frac{5}{9}$

Remarque : En modélisant cette expérience par deux méthodes différentes on retrouve les mêmes résultats (ce qui est rassurant), cependant la deuxième manière est plus avantageuse. En effet si il y avait plus de trois boules dans cette urne, la première méthode aurait demandé beaucoup plus de temps à l'écriture, ainsi on procédera toujours comme dans le deuxième cas.

Exercice 7 :

1. On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3). Quelle est la probabilité que la somme dé et du jeton éventuel soit égale à 5 ?
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?

Exercice 8 :

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non. On sait que :

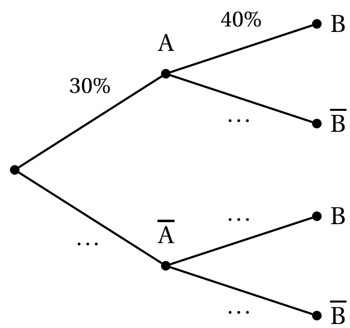
– 30% des dragées contiennent une amande.
– 40% des dragées avec amandes sont bleues,, les autres sont roses ;
– 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasad une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.

On considère les événements suivants :

– A : « la dragée choisie contient une amande »
– B : « la dragée choisie est bleue »

1. Compléter l'arbre des fréquences donnée ci-dessous



2. Quelle est la proportion de dragées bleues contenant une amande ?
3. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0.12.
4. Calculer la probabilité de l'événement B.
5. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.