Chapitre 8

Polynômes de degré 2

Hors Sujet

Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et co-écrite avec Ed Burns, diffusée sur HBO du 2 juin 2002 au 9 mars 2008.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Curiosité, elle est aussi la série préférée de Barack Obama, le président des USA déclare être fasciné par le personnage d'Omar...

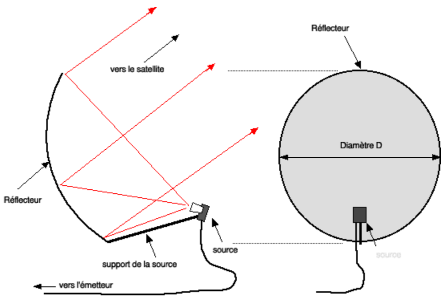
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 8

Polynômes de degré 2



Résumé

Les fonctions permettent de modéliser de nombreuses situations. Par exemple, les trajectoires de balles ou d'objets dans l'air et dans le vide semble décrirent des arcs de paraboles. L'étude des polynômes de degré 2 nous permettra d'appliquer toutes les notions entrevues en début d'année sur les fonctions.

? Problème :

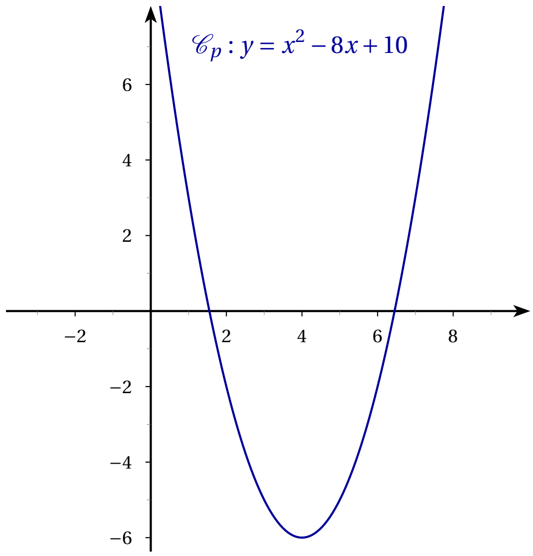
On connait l'aire $\mathscr{A} = 10$ cm^2 et le périmètre $\mathscr{P} = 16$ cm d'un rectangle. Peut-on déterminer les longueurs des côtés de ce rectangle.

Solutions :

Si on note x et y les longueurs des deux côtés cherchés alors :

$$xy = 10 \qquad \text{et} \qquad x + y = 8 \Longleftrightarrow y = 8 - x$$

Ainsi $x(8-x) = 10 \Longleftrightarrow 8x - x^2 = 10 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$.
En posant $\mathrm{P}(x) = x^2 - 8x + 10$. On est amené à rechercher les éventuels antécédents de 0. A l'aide de la calculatrice et de la représentation graphique de la fonction P on peut déjà avoir une idée de la réponse :



0 a deux antécédents par P, qui sont approximativement 1,5 et 6,5.
Si $x = 1{,}5$ et $y = 6{,}5$, on obtient $xy = 9{,}75$ et $x + y = 8$, ce qui semble être une bonne approximation.

I) Cas particulier : La fonction carré

I-1 Définition

Définition 1 :

On appelle fonction carrée la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Propriété 1 :

La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 :

f est la fonction carré. Calculer les images par f des réels :

1. -4
2. $\dfrac{2}{3}$
3. $-\dfrac{11}{5}$
4. $3\sqrt{56}$
5. $-2\sqrt{13}$
6. 10^{41}
7. 8×10^{-4}
8. $2+\sqrt{5}$

I-2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 2 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Preuve

Considérons deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) < 0 \iff a^2 < b^2$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre et la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Considérons deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0 \iff a^2 > b^2$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse et la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exercice 2 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi-1)^2$
4. $(2-\sqrt{7})^2$ et $(2-\sqrt{5})^2$

Exercice 3 :

1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $-9 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de de $\frac{y^2}{5}$.
3. Soit z un réel tels que $-9 \leq z \leq 1$. Donner un encadrement de de z^2.
4. Soit t un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5t-1} \leq 2$. Donner un encadrement de t.

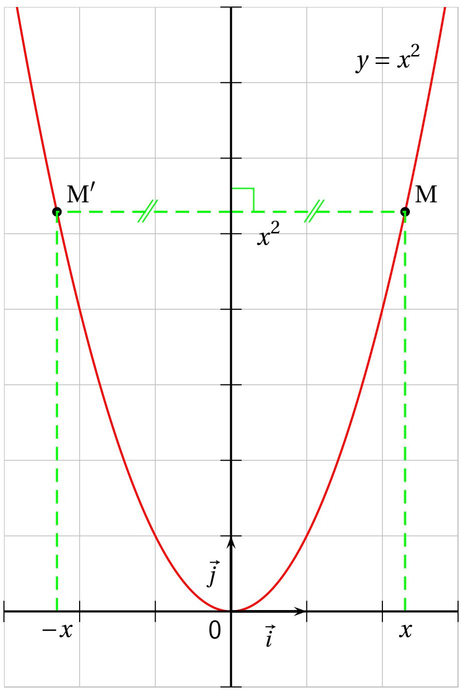
I-3 Courbe représentative

Définition 2 :

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	...



Propriété 3 :

La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On dit que la fonction est *paire*.

Preuve

Pour tout nombre réel x le point $\mathrm{M}(x; x^2)$ est sur la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré.
Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est $\mathrm{M}'(-x; x^2)$.
Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{P}$ car $(-x)^2 = x^2$.

Remarque : On sait qu'un carré est toujours positif.

Exercice 4 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction carré :

1. $x^2 \leq 5$
2. $x^2 \leq -3$
3. $x^2 > 2$

Exercice 5 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.
Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercice 6 :

1. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$.
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

II) Cas général : Les fonctions polynômes de degré 2

II-1 Forme développée

Définition 3 :

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul et b et c sont deux réels quelconques.

Exemple :

La fonction P définie par $\mathrm{P}(x) = x^2 - 8x + 10$ est une fonction polynôme de degré 2.
Les fonctions affines ne sont pas des fonctions polynômes. Elles sont obtenues pour $a = 0$, on parle de fonction polynôme de degré 1.

Remarque : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée de la fonction polynôme f. Elle pratique pour :
- déterminer l'image de 0 : $f(0) = c$.
- déterminer les antécédents éventuels de c : $f(x) = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{b}{a}$

Exercice 7 **:**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
1. Démontrer que f est une fonction polynôme de degré 2.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -2 par f.
4. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.

II-2 Forme canonique

II-2.1 Définition

Théorème 1 :

Toute fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme (dite canonique) $f(x) = \alpha\left(x-\beta\right)^2 + \gamma$ où α est un réel non nul et β et γ sont deux réels quelconques.

Preuve

Si f est une fonction polynôme de degré 2 alors il existe $a \neq 0$ et deux réels b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Remarquons que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} = x^2 + \dfrac{b}{a}x$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

En posant $\alpha = a$, $\beta = -\dfrac{b}{2a}$ et $\gamma = -\dfrac{b^2}{4a} + c$, on obtient le résultat désiré.

Remarque : Le premier intérêt de la forme canonique est de déduire un extremum de la fonction f.
En effet, si $a > 0$ alors :

$$\left(x-\beta\right)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha\left(x-\beta\right)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha\left(x-\beta\right)^2 + \gamma \geq \gamma$$

De pus $f(\beta) = \alpha(\beta-\beta) + \gamma = \gamma$. Ce qui prouve que γ est le minimum de f atteint pour $x = \beta$.

Si $a<0$ alors :

$$(x-\beta)^2 \geq 0 \iff \alpha(x-\beta)^2 \leq 0 \iff \alpha(x-\beta)^2+\gamma \leq \gamma$$

De pus $f(\beta)=\alpha(\beta-\beta)+\gamma=\gamma$. Ce qui prouve que γ est le maximum de f atteint pour $x=\beta$.

Théorème 2 :

Soit f une fonction polnôme de degré 2 telle que $f(x)=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, alors f admet γ pour extremum atteint en β.

Remarque : Si $f(x)=ax^2+bx+c$ alors l'extremum vaut $c-\dfrac{b^2}{4a}$ atteint lorsque $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'extremum de f, on précisera s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et pour quelle valeur de x il est atteint.

1. $f(x)=-3(x-1)^2+2$
2. $f(x)=4(x+2)^2-5$
3. $f(x)=-2x^2+1$
4. $f(x)=7\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x)=9(x+\pi)^2-1$
6. $f(x)=-(x+1-\sqrt{2})^2+1$.

II-2.2 Variations et représentation graphique

On étudie les variations de la fonction f définie pour $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$$

– *Cas 1* : $\alpha>0$

Montrons que f est strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$.
Considérons deux antécédents x et y de $[\beta;+\infty[$ avec $\beta\leq x<y$ et montrons que $f(x)<f(y)$.
Pour cela étudions le signe de $f(x)-f(y)$.

$$f(x)-f(y)=\alpha(x-\beta)^2+\gamma-\left(\alpha(y-\beta)^2+\gamma\right)=\alpha(x-\beta)^2+\gamma-\alpha(y-\beta)^2-\gamma$$

$$f(x)-f(y)=\alpha(x-\beta)^2-\alpha(y-\beta)^2=a\left((x-\beta)^2-(y-\beta)^2\right)=a(x-\beta+y-\beta)(x-\beta-y+\beta)=a(x-\beta+y-\beta)(x-y)$$

Comme $x<y$ alors $x-y<0$. Comme $x\geq\beta \iff x-\beta\geq 0$ et enfin comme $y\geq\beta\iff y-\beta\geq 0$. Ainsi $x-\beta+y-\beta\geq 0$ et donc $(x-\beta+y-\beta)(x-y)<0 \Longrightarrow \alpha(x-\beta+y-\beta)(x-y)<0 \Longrightarrow f(x)-f(y)<0 \Longrightarrow f(x)<f(y)$.
On vient de montrer que images et antécédents sont rangés dans le même ordre sur $[\beta;+\infty[$.
Par conséquent f est strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$.
Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty;\beta]$.
Considérons deux antécédents x et y de $]-\infty;\beta]$ avec $x<y\leq\beta$ et montrons que $f(x)>f(y)$.
Pour cela étudions le signe de $f(x)-f(y)=\alpha(x-\beta+y-\beta)(x-y)$.
$x-y<0$ et $x-\beta+y-\beta\leq 0$, par conséquent $(x-\beta+y-\beta)(x-y)>0 \Longrightarrow \alpha(x-\beta+y-\beta)(x-y)>0 \Longrightarrow f(x)>f(y)$
On vient de montrer que images et antécédents sont rangés dans l'ordre inverse sur $]-\infty;\beta]$.
Par conséquent f est strictement décroissante sur $]-\infty;\beta]$.

– *Cas 2* : $\alpha<0$

La démonstration est identique, cependant comme $\alpha<0$, on obtient des résultats opposés i.e f **est strictement décroissante sur $[\beta;+\infty[$. et f est strictement croissante sur $]-\infty;\beta]$.**

On retiendra donc que lorsque $\alpha>0$ on a :

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	γ	$\nearrow$	

Et lorsque < 0 on a :

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	γ	$\searrow$	

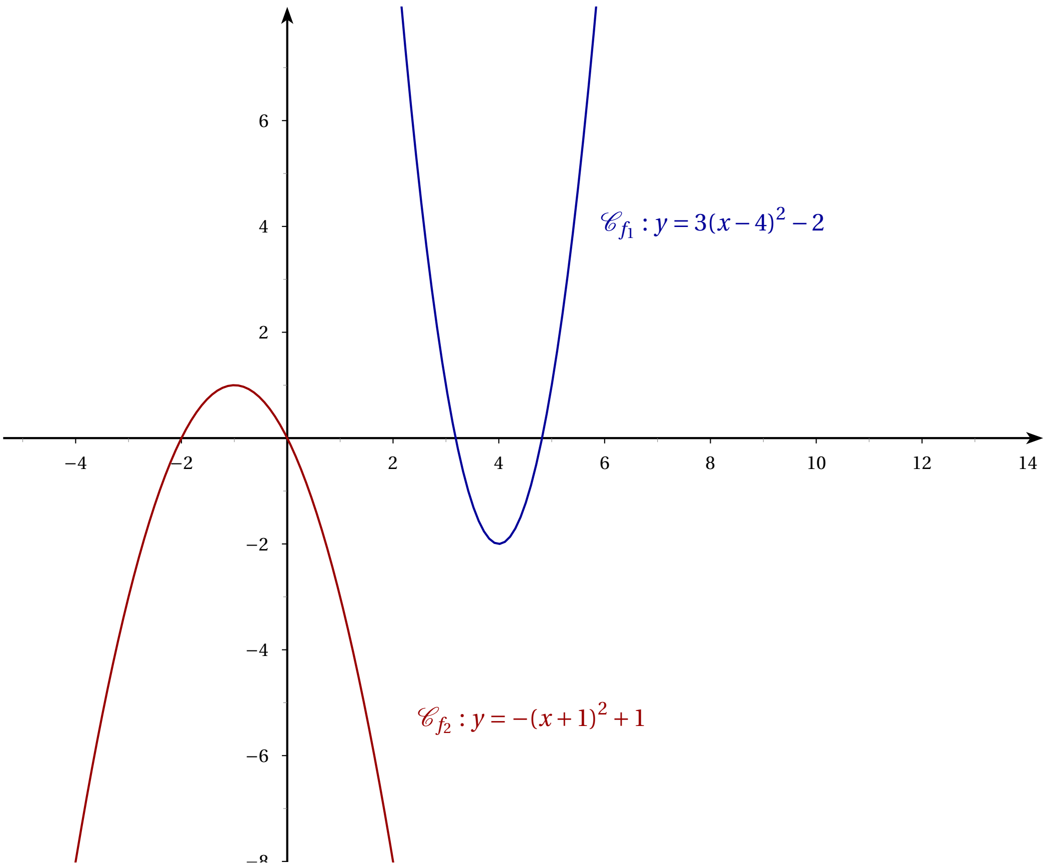
Observons sur deux exemples les représentations graphiques de fonction polynôme de degré 2.
Considérons les fonctions $f_1(x) = 3(x-4)^2 - 2$ et $f_2(x) = -(x+1)^2 + 1$.
D'après le résultat précédent on connait leur tableau de variation que voici :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f_1(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

puis

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_2(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

On trace comme à l'habitude les représentations graphiques des deux fonctions f_1 et f_2



Définition 4 :

La représentation graphique d'une fonction polynôme f de degré 2 est appelée parabole et a pour équation $y = f(x)$.

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, construire le tableau variation de f, puis tracer la courbe réprésentative de f.

1. $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$
2. $f(x) = 4(x+2)^2 - 5$
3. $f(x) = -2x^2 + 1$
4. $f(x) = 7\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x) = 9(x+\pi)^2 - 1$
6. $f(x) = -(x+1-\sqrt{2})^2 + 1$.

II-2.3 Retrouver la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Théorème 3 : *admis*

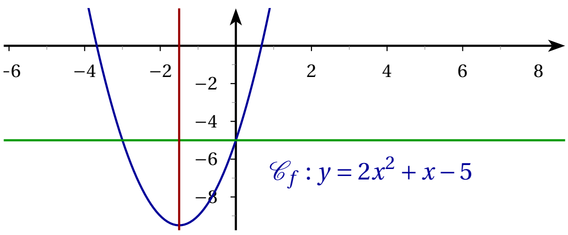
Soit f une fonction polynôme de degré 2 et $f(x) = \alpha\left(x-\beta\right)^2 + \gamma$ sa forme canonique. La représentation graphique de f admet la droite verticale d'équation $x = \beta$ comme axe de symétrie.

Exemple :

On donne $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$. Retrouvons la forme canonique de f.
Déterminons les antécédents éventuels de -5 :

$$2x^2 + 6x - 5 = -5 \Longleftrightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x(2x+6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} = -3$$

Ainsi on a $f(-3) = -5 = f(0)$. Graphiquement on a une situation du type :



Clairement $\beta = \dfrac{-3+0}{2} = -1,5$, $\alpha = 2$ et γ est le minimum de f atteint lorsque $x = -1,5$.
Calculons $f(-1,5) = 2 \times (-1,5)^2 - 6 \times 1,5 - 5 = \frac{9}{4} - 9 - 5 = \frac{9}{4} - 14 = \frac{9}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{47}{4}$.
En conclusion on obtient :

$$f(x) = 2(x+1,5)^2 - \frac{47}{4}$$

Exercice 10 :

Dans chacun des cas suivants, retrouver la forme canonique de la fonction f.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
3. $f(x) = 3x^2 - 12x - 1$
4. $f(x) = -3x^2 + 12 + 1$

II-3 Forme factorisée

Exercice 11 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une fonction polynôme de degré 2.

1. $f(x) = (x-1)(x-2)$
2. $f(x) = (2x-1)(4-x)$

Théorème 4 :

Toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-r)(x-r')$ avec $a \neq 0$ et r et r' deux réels quelconques est une fonction polynôme de degré 2 écrite sous sa forme factorisée.

Remarque : La forme factorisée d'un polynôme est utile pour déterminer les antécédents de 0 (que l'on appelle les racines) ou encore pour dresser le tableau de signe d'un polynôme.

Preuve

$f(x) = a(x-r)(x-r') = a(x^2 + (-r-r')x + rr') = ax^2 + a(-r-r')x + arr'$ est donc bien une fonction polynôme de degré 2.

Exercice 12 :

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = x^2 - 8x + 10$ (il s'agit de la fonction issue du problème d'introduction).

1. Déterminer la forme canonique de P.
2. En déduire la forme factorisée.
3. En déduire les solutions aux problèmes d'introduction.
4. Déterminer le signe de P en fonction des valeurs de x.

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe tableau de signe des fonctions f en fonction des valeurs de x :

1. $f(x) = (2x+1)(-x+5)$
2. $f(x) = (5x-1)(3x+1)$
3. $f(x) = (1-x)(1+x)$
4. $f(x) = x^2 - 5$

Exercice 14 :

Reprendre les fonctions de l'exercice précédent et résoudre successivement chacune des inéquations ou équations suivantes $f(x) = 0$ puis $f(x) < 0$ puis $f(x) \geq 0$ puis $f(x) \leq 0$ et enfin $f(x) > 0$.