Table des matières

Leçon 1

Nombres réels et intervalles

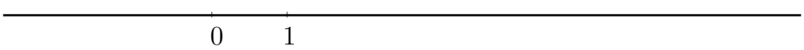
Résumé

Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux instruments.
Cette conjecture (erronée) va remettre en question la définition d'un nombre : les nombres rationnels (les fractions) ne suffisent pas à exprimer toutes les longueurs puisque la diagonale d'un carré de côté 1 est constructible, mais correspond au nombre $\sqrt{2}$ dont on peut démontrer qu'il ne peut pas s'écrire comme le rapport de deux entiers i.e qu'il n'est pas rationnel et pourtant on peut le construire à l'aide d'une règle et d'un compas. On doit à Hippase de Métaponte la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, cette découverte choqua tellement la grèce antique qu'on raconte qu'il fut jeter à la mer. En effet les nombres, comme le monde, ne pouvait être que rationnels !
Pire on découvrira plus tard que certains nombres ne peuvent pas être obtenus à l'aide d'une règle et d'un compas, c'est la cas de π.

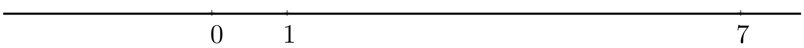
I) Construction à la règle et au compas

I-1 Les nombres entiers naturels

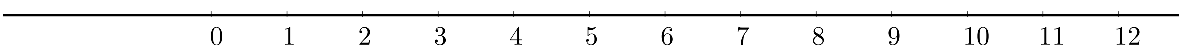
Partons de la droite suivante :



Et construisons à l'aide d'une règle et d'un compas un segment de longueur 7. En ne se servant que du compas et en reportant 7 fois la longueur 1 il est simple d'obtenir la figure suivante :



En procédant de la même manière pour chacun des nombres entiers (positifs) on obtient :



Définition 1 :

L'ensemble des nombres entiers naturels se note $\mathbb{N}$ et désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

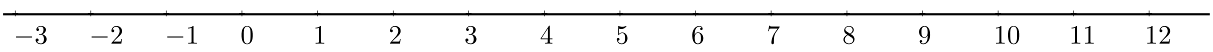
Exercice 1. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On pose :

$$a = \frac{p+1}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p-1}{2}$$

1. Donner la liste des 10 plus petit nombres premiers.
2. Justifier que a et b sont des nombres entiers.
3. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p.
4. En déduire que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers. Donner cette différence pour $p = 29$.

I-2 Les nombres entiers relatifs

En reproduisant le même procédé que pour les entiers naturels on obtient les entiers négatifs :



de sorte que nous pouvons graduer la droite de 1 en 1 d'un bout à l'autre. Nous pouvons construire n'importe quel entier relatif !

Définition 2 :

L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs.
$\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Remarque : Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, ou encore que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Attention !

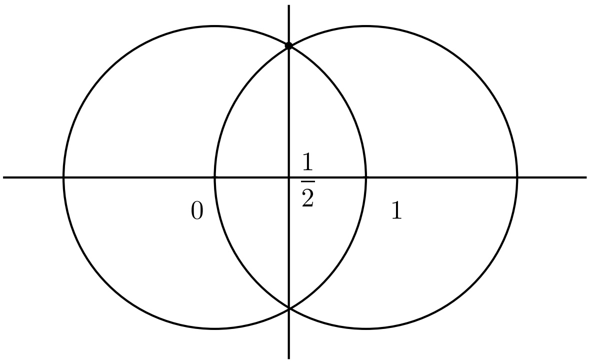
Le symbole $\subset$ ne doit pas être confondu avec $\in$. On utilise $\in$ lorsque un élément appartient à un ensemble, comme par exemple $2 \in \mathbb{Z}$, en revanche on utilise $\subset$ lorsque un ensemble est tout entier contenu dans un autre ensemble, comme par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

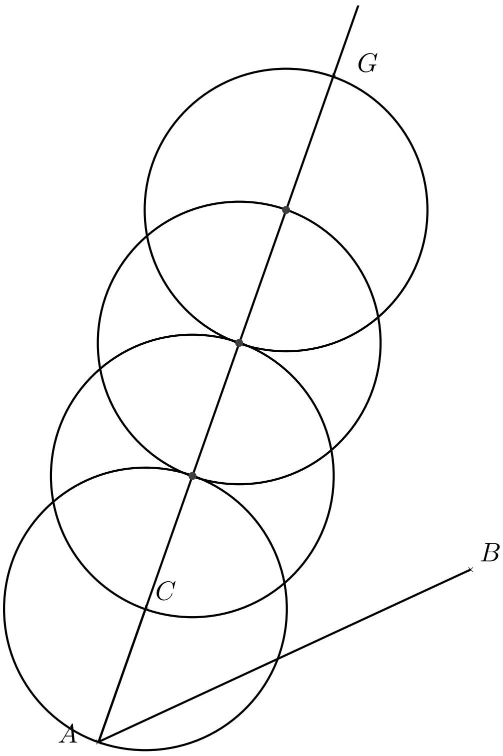
1. Calculer $(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $n \times (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

I-3 Les nombres rationnels

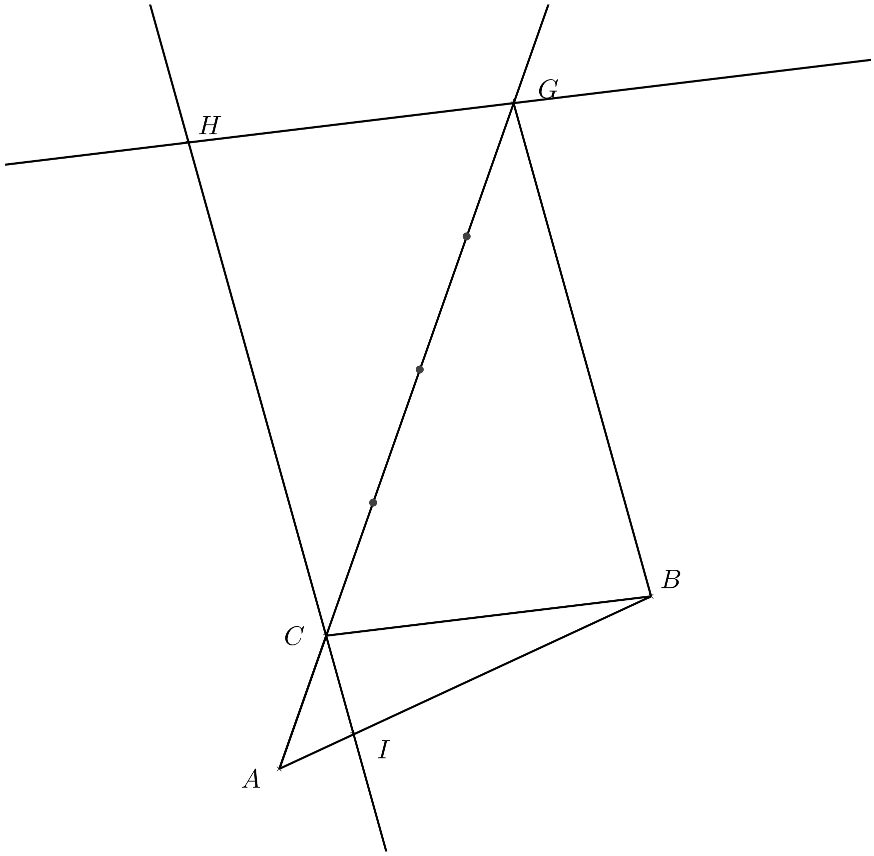
Nous pouvons placer $\frac{1}{2}$ en construisant à l'aide de la règle et du compas une médiatrice :



Supposons que l'on souhaite à l'aide de la règle et du compas diviser un segment $[AB]$ en 5. On va utiliser le théorème de Thalès, mais pour commencer on place n'importe où un point C et sur la demi-droite $[AC)$ on remporte 5 fois la longueur AC :



On construit le parallélogramme $CBGH$ de manière à ce que la droite (CI) et la droite (GB) soit parallèle :



Le théorème de Thalès nous assure alors que :

$$\frac{AC}{AG} = \frac{AI}{AB} \iff \frac{1/5AG}{AG} = \frac{AI}{AB} \iff AI = \frac{1}{5}AB$$

On sait donc placer $\frac{1}{5}$ sur la droite graduée, et donc en reportant la longueur $\frac{1}{5}$ on peut placer $\frac{2}{5}$, puis $\frac{3}{5}$, ect...

Exercice 3. En appliquant la méthode précédente construire à l'aide de la règle et du compas le nombre $\frac{5}{3}$. On commencera par construire $\frac{1}{3}$.

Ainsi on sait construire n'importe quel quotient de deux nombres entiers.

Définition 3 :

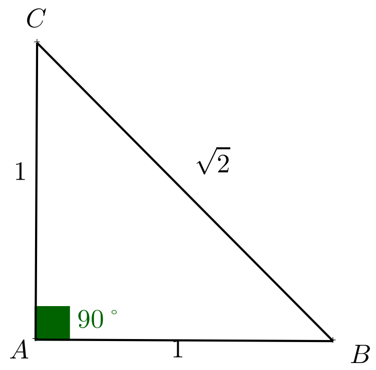
L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Remarque : Z^* représente l'ensemble des entiers relatifs privé de 0.
$b \in \mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.
Tous les entiers relatifs a peuvent s'écrire $a = \frac{a}{1}$, donc sont des rationnels. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

I-4 Les nombres réels

I-4.1 Quelques irrationels constructibles à la règle et au compas.

Pour construire $\sqrt{2}$ il suffit de construire un triangle rectangle isocèle de côté 1, l'hypoténuse (d'après Pythagore) a alors comme longueur $\sqrt{2}$:

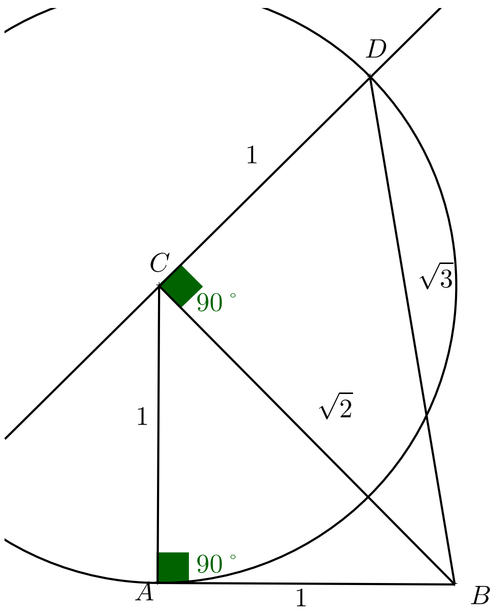


Remarque : $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers (admis), par conséquent $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, il s'agit d'un nombre irrationnel. De même $\sqrt{3} \notin Q$, comme $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, et encore $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. En revanche $\sqrt{4} = 2 = \dfrac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.

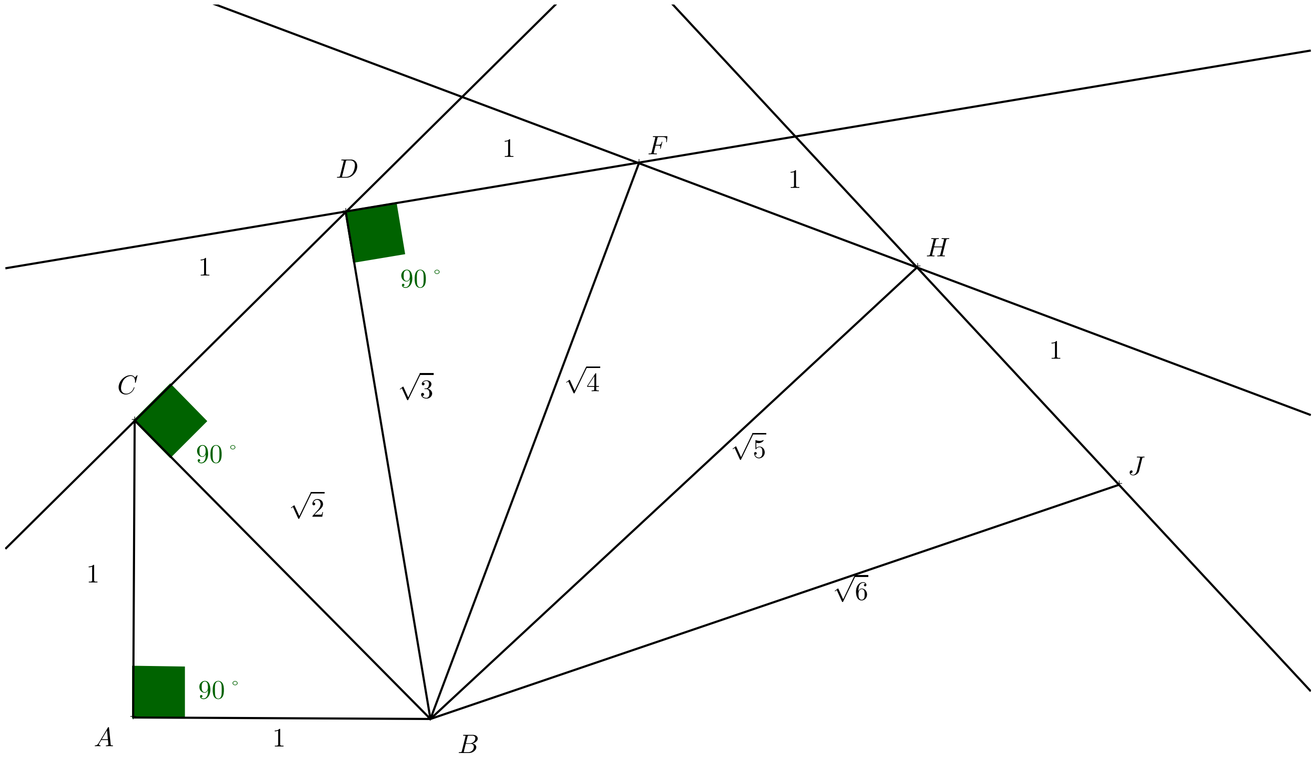
? Question : Construction à la règle et au compas de $\sqrt{3}$

Construire, uniquement à l'aide de la **règle non graduée et du compas**, un segment de longueur $\sqrt{3}$

Construisons un triangle rectangle de côté 1 et $\sqrt{2}$, d'après Pythagore l'hypoténuse mesurera $\sqrt{3}$:



En procédant de manière identique on peut construire les racines carrées successives :



Définition 4 :
L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$ et représente l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Géométrique on peut le représenter par une droite graduée. L'abscisse d'un point de la droite est alors un nombre réel. Il contient tous les nombres connus en classe de seconde.

Propriété 1 :
Tous les nombres rationnels sont réels. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

I-4.2 Le cas π

Certains nombres comme π sont irrationnels et non constructible à la règle et au compas. Il n'existe aucune construction permettant d'obtenir un segment de longueur π en utilisant juste une règle et un compas, ce résultat est bien trop complexe pour être développé en classe de seconde.

II) Intervalle de $\mathbb{R}$

II-1 Définition

Définition 5 :
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a; b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle $[a; b]$.

Remarque : On dit qu'un intervalle est borné si et seulement si ses deux bornes sont finies (ie réels).

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exemples :

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3}; \sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5}; +\infty\right[$$

II-2 Manipulation d'inégalité

Exercice 4.

1. Supposons que $x \in [1; 5]$ et $y \in [2; 7]$. Encadrer xy, $x + y$, $x - y$ et $\frac{x}{y}$.
2. Dans chacun des cas suivants donner l'intervalle dans lequel se situe le nombre x :

(a) $2 \leq 2x + 3 \leq 7$

(b) $-3x + 1 \leq 7$

(c) $-4x + \frac{1}{2} > \frac{7}{3}$

(d) $x(x + 2) < x^2$

(e) $-1 \leq -x + 1 < 8$

(f) $x^2 > 4$

Résumé :
L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.

L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Les élémlents de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	