Dispositif 22 mai - 22 juin

Projet de Mathématiques

Feuille 3 d'exercices pour la série S

Ensemble de définition : *On rappelle que l'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul de f(x) est possible.*

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ $\quad g : x \mapsto \sqrt{x-3}$ $\quad h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ $\quad i : x \mapsto \dfrac{1}{2x}+3$

$j : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ $\quad k : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-3}$ $\quad l : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+5}$ $\quad m : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Images, antécédents & tableaux de valeurs :

1) Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4	3	2	-1	-3	-4	-3	-4	0

a. Quelle est l'image de -3 ?
b. Quel est l'antécédent de -1 ?
c. Quel nombre a pour image 2 ?
d. Quel nombre a pour antécédent 0 ?
e. Quels sont les deux nombres qui ont la même image ?

2) Voici le tableau de valeurs d'une fonction g :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g(x)	6	4	2	7	8	1	3	4	7

Compléter les égalités :

g(4) = ……	g(……) = 2	g(5) = ……	g(……) = 4	g(7) = ……	g(……) = 7

3) On considère la fonction définie par $h : x \mapsto x - \dfrac{1}{x+1}$.

Compléter le tableau de valeurs de h à l'aide de la calculatrice (on arrondira au centième).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
h(x)									

Fonction carrée :

1) Associer à chaque affirmation sa justification :

Un carré est toujours positif	•	•	$f : x \mapsto x^2$ est définie sur]-∞ ; +∞[
(-5,12) > (-5,11)	•	•	$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur]-∞ ; 0]
(-9,54) = 9,54	•	•	$f : x \mapsto x^2$ admet pour minimum 0
Tout nombre réel admet un carré	•	•	$f : x \mapsto x^2$ est croissante sur [0 ; +∞[
801 < 802	•	•	$f : x \mapsto x^2$ est paire (c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$)

2) a. Construire le tableau de variation de la fonction carrée sur $[-7;2]$.
b. Quels sont le maximum et le minimum de la fonction sur cet intervalle.
c. Mêmes questions sur $[-5;-3]$.

3) Soit $f : x \mapsto x^2$. Quel est l'intervalle décrit par $f(x)$ quand :

a. $x \in [2;6]$
b. $x \in [-8;-4]$
c. $x \in]-5;2]$
d. $x \in]-10;9[$
e. $x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

Fonction inverse :

1) Associer à chaque affirmation sa justification :

$\frac{1}{(-\pi)} = -\frac{1}{\pi}$	•	• $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{-34} > \frac{1}{-29}$	•	• $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire (c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$)
Tout nombre réel non nul admet un inverse	•	• $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$
$\frac{1}{826} > \frac{1}{827}$	•	• $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

2) a. Construire le tableau de variation de la fonction inverse sur $[4;10]$.

b. Quels sont le maximum et le minimum de la fonction sur cet intervalle.

c. Mêmes questions sur $[-5;-3]$, puis sur $[-4;2]$ (si les extrema existent).

3) Quel est l'intervalle décrit par la fonction inverse quand :

a. $x \in [10;100]$

b. $x \in [-0,1;-0,01]$

c. $x \in]-1;0[\cup]0;1]$

d. $x \in [-2;0[\cup]0;4]$

e. $x \in [-2;-1[\cup [1;2]$

Sens de variation :

1. Soit la fonction définie sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto (x-3)^2$

Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.

2. Soit la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ par $g : x \mapsto (x+2)^2 - 6$.

Montrer que la fonction g est décroissante sur $]-\infty;-2]$

3. Soit la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $h : x \mapsto \frac{4}{x-1}$

Montrer que la fonction h est décroissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

4. Soit la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -5[$ par $l : x \mapsto 2 - \frac{3}{x+5}$

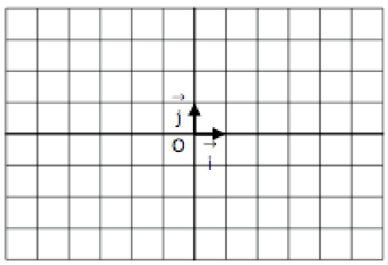
Montrer que la fonction l est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -5[$.

Tableau de variations :

Construire dans chaque cas une courbe qui correspondrait à différents renseignements fournis :

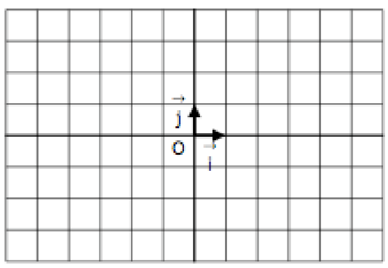
a. - L'image de 0 est 3 ;
- Les antécédents de 0 sont -2 et 3 ;
- Le tableau de variation de f est le suivant :

x	-6		-3		1		5		6
f(x)	-2	↘	-3	↗	4	↘	-2	↗	-1



b. - L'équation g(x) = 2 a pour solutions : S = {-4 ; 1}
- L'inéquation g(x) ≤ -1 a pour solution l'intervalle [-3 ; 0]
- L'inéquation g(x) > 3 a pour solution l'intervalle]2 ; 5[
- Le tableau de variation de g est le suivant :

x	-6		-1		3		6
g(x)	3	↘	-4	↗	4	↘	0



EXERCICE 4B.3

On ne connaît une fonction f que par son tableau de variation.
Pour chacune de ces affirmations dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse :

x	-4		-2		0		4		6
f(x)	1	↘	0	↗	3	↘	-3	↗	-1

a. f(-3) = 4 **b.** f(1) > f(3) **c.** f(-1) est positif **d.** f(x) = 0 a une seule solution

e. f(1) > 3 **f.** f(5) est négatif **g.** f(-3) < f(-2) **h.** Si $x \in [0\ ;\ 6]$, f(x) ≥ -3

Etude complète : Soit la fonction définie sur]-∞ ; +∞[par $h : x \mapsto 4 + \dfrac{2}{x-3}$

a. Quel est l'ensemble de définition D_h de la fonction h ?

b. Montrer que la fonction h est décroissante sur]3 ; +∞[.

c. Quel est son sens de variation sur]-∞ ; 3[?

d. Dresser son tableau de variation sur D_h .

e. Tracer la courbe représentative de h.

QCM :

Pour chacune des huit questions ci-dessous, il y a une et une seule réponse exacte.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x-2)(x-3)$

Note : tracer la représentation graphique de la fonction f peut aider à contrôler certains résultats.

1. Si on développe $f(x)$, on obtient :

   A $x^2 - x + 6$ *B* $x^2 - x - 6$ *C* $x^2 - 5x + 6$

2. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :

   A -2 et -3 *B* 2 et 3 *C* x et 0

3. L'image de 1 par f est :

   A 1 *B* 2 *C* 3

4. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont :

   A $[-3\ ;-2]$ *B* $[2\ ;3]$ *C* $]-\infty\ ;2] \cup [3, +\infty[$

5. La fonction f est toujours positive :

   A VRAI *B* FAUX *C* On ne peut pas le savoir

6. Les antécédents éventuels de 6 par f sont :

   A il n'y en a pas *B* 12 *C* 0 et 5

7. La fonction f est croissante sur l'intervalle :

   A $[2\ ;+\infty[$ *B* $[3\ ;+\infty[$ *C* $[2{,}5\ ;+\infty[$

8. La fonction f est :

   A paire *B* impaire *C* ni paire, ni impaire