

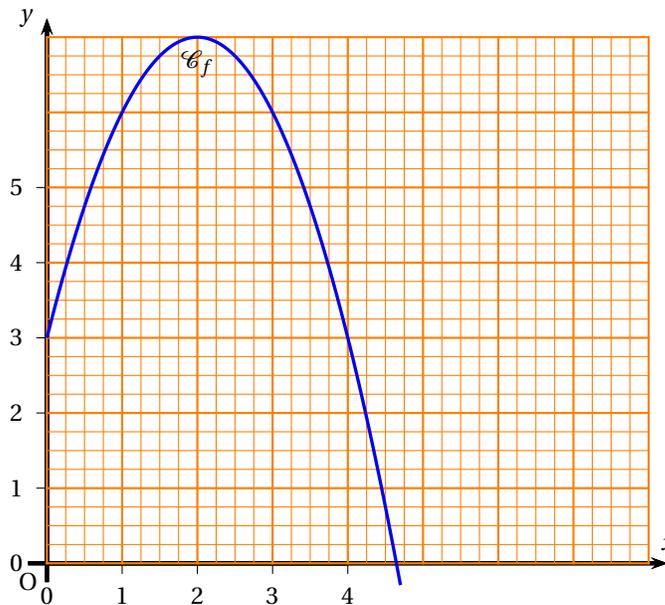
EXERCICES SUITES GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1 : Inspiré d'Antilles-Guyanne juin 2011 Arts Appliqués
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = -x^2 + 4x + 3.$$

On a représenté ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
On demande un minimum de justification, et non une réponse brute!
2. Dresser le tableau des variations de f .
On attend ici des calculs, mais pensez à vérifier la cohérence avec le graphique donné en annexe.
3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_1^4 f(x) dx$.
4. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine dont l'aire vient d'être calculée.



Exercice 2 : Métropole septembre 2011 Arts Appliqués

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$$

La courbe représentative de cette fonction est une partie P de la parabole représentée en annexe dans un repère orthogonal du plan. Unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0, 3]$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 g(x) dx$.

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[3 ; 6]$ par

$$h(x) = 3 \ln x - 3 \ln 3 + 1$$

et Γ sa courbe représentative dans le même repère que celui de la partie A.

1. a. On désigne par h' la dérivée de la fonction h . Vérifier que :
Pour tout réel x de l'intervalle $[3; 6]$, $h'(x) = \frac{3}{x}$.
 - b. Quel est le sens de variation de h sur l'intervalle $[3, 6]$?
 - c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 3.
On admettra que T est également tangente à la courbe P au même point.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au centième.

x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$h(x)$							

Tracer la courbe Γ et la droite T dans le repère joint en annexe.

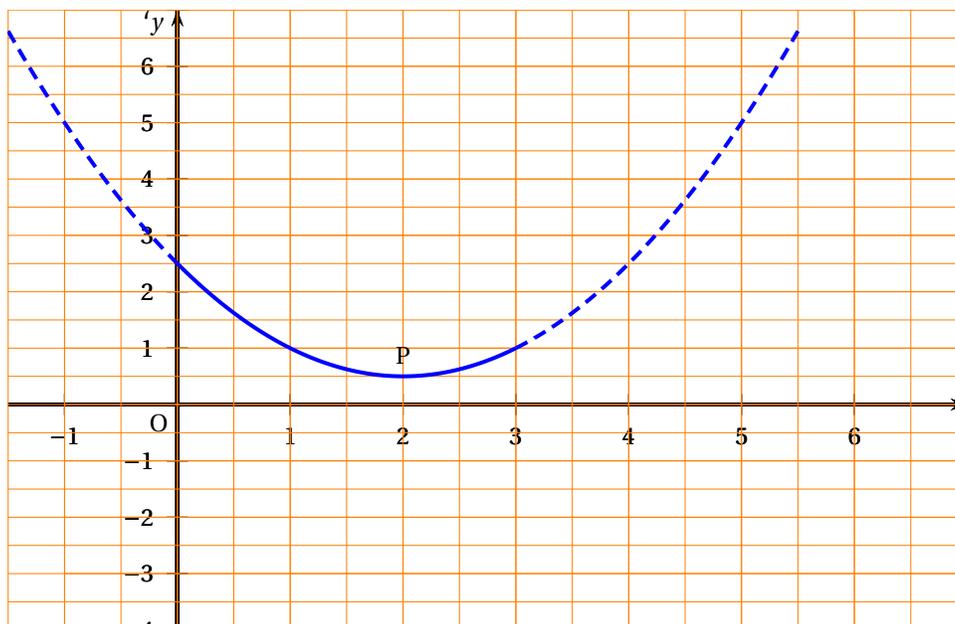
3. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[3; 6]$ par

$$H(x) = 3x \ln x - (3 \ln 3 + 2)x.$$

- a. Vérifier que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[3; 6]$.
- b. On appelle J l'aire (en unités d'aires) de la partie du plan limitée par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 6$. Déterminer la valeur arrondie de J au centième.

Partie C

1. On appelle C la réunion des courbes P et Γ .
Construire sur le graphique la courbe C' symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.
2. On veut connaître l'aire d'un logo dont le contour est formé par C , C' et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 6$.
Justifier que l'aire de ce logo est égale, en cm^2 , à $4(I + J)$. En donner la valeur arrondie à l'unité.



Exercice 3 : Métropole Juin 2011 Génie Mécanique

Objectif : Le but de ce problème est de comparer, sur un exemple, deux méthodes de calcul de volumes.

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par

$$f(x) = -x \ln x + 2x.$$

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel $x \in [1 ; 10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.
2.
 - a. Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$.
 - b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
3. On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).
Représenter graphiquement \mathcal{C} dans ce repère.
4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
 - a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).
 - b. Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près, en explicitant votre méthode.
5. On considère la fonction F, définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$, par

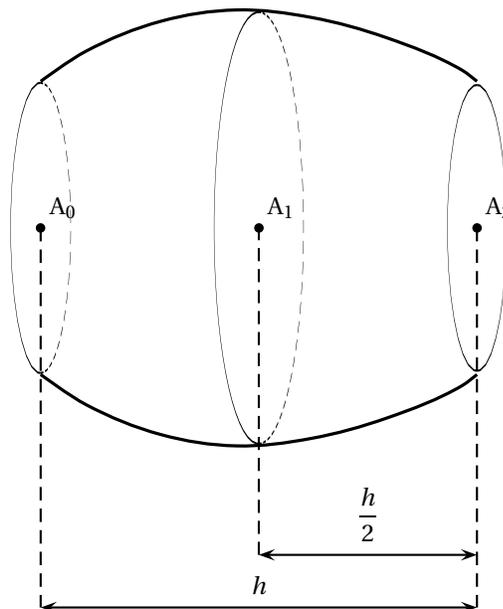
$$F(x) = x^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right).$$

- a. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
 - b. Sur la représentation graphique réalisée précédemment, hachurer la portion S du plan comprise entre \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 7$.
 - c. À l'aide de la représentation graphique, évaluer (en unités d'aire) l'aire de la portion S.
Justifier la méthode utilisée.
 - d. Calculer la valeur exacte de cette aire en unités d'aire.
6. On veut déterminer le volume V_s du solide engendré par la rotation de la partie hachurée autour de l'axe des abscisses.
- a. Méthode par calcul formel :
À l'aide d'un logiciel de calcul formel on obtient :

$$V_s = \pi \left(\frac{343(\ln 7)^2}{3} - \frac{4802 \ln 7}{9} + \frac{1900}{3} \right) \text{ unités de volume.}$$

En déduire une valeur approchée de V_s à 10^{-2} près.

- b. Méthode des trois niveaux :
La méthode, dite des trois niveaux, permet d'estimer le volume d'un solide.



Par cette méthode, le volume estimé d'un solide de révolution de hauteur h est égale à

$V_e = \frac{1}{6}h(A_0 + 4A_1 + A_2)$ où A_0 est l'aire de la section gauche, A_1 l'aire de la section intermédiaire et A_2 l'aire de la section droite.

Compléter, par des valeurs approchées au centième, le tableau des surfaces ci-dessous

Tableau des surfaces

Surface	Section gauche	Section intermédiaire	Section droite
Rayons		$f(4) = -4\ln(4) + 8 \approx 2,45$	
Aires	12,57		

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de V_e .

- c. On considère que la méthode des trois niveaux est acceptable si le rapport $\frac{V_e}{V_s}$ est compris entre 0,95 et 1,05. Peut-on affirmer que cette méthode des trois niveaux est acceptable pour cet exemple ?

 **Exercice 4** : Réunion juin 2011 Génie Electronique

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par

$$f(x) = \ln x + ax + b,$$

où a et b désignent deux nombres réels, et on note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; 10]$.

On sait que le tableau de variations de f sur $]0; 10]$ est le suivant :

x	0	2	10
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$-\infty$	$-2 + \ln 2$	$-6 + \ln 10$

Partie A

- Déduire du tableau de variations le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; 10]$.
- Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel x de l'intervalle $]0; 10]$.
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

À l'aide de données numériques du tableau de variations, calculer a et b .

Partie B

On admet que, pour tout réel x appartenant à $]0; 10]$,

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x - 1.$$

On considère la fonction g définie sur $]0; 10]$ par

$$g(x) = (\ln x)^2 - x - 2\ln x$$

dont la courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) est fournie ci-dessous.

1. a. Déterminer la limite de g en 0.
b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. a. Montrer que pour tout x de $]0; 10]$, $g'(x) = \frac{2f(x)}{x}$.
b. Déterminer les variations de la fonction g sur $]0; 10]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
4. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[0,1; 10]$.
b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Partie C

Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par

$$G(x) = x(\ln x)^2 - 4x \ln x + 4x - \frac{1}{2}x^2.$$

1. Vérifier que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0; 10]$.
2. Sur le graphique ci-dessous figure la courbe \mathcal{C} . Tracer la droite T et hachurer le domaine Δ limité par la droite T , la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. On admet que la droite T est toujours située au dessous de la courbe \mathcal{C} . Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine.

