∽ Exercices ∾
Suites Géométriques

Exercice 1 : Dans un laboratoire de chimie, un stagiaire utilise un liquide dont l'évaporation est importante.
A l'originie, il y a 75 cL de liquide dans la bouteille. Le stagiaire referme mal cette bouteille et on considère alors que le liquide perd chaque jour 5% de son volume par évaporation.
On note u_n la quantité de liquide, exprimée en cL, présente dans la bouteille au bout de n jours. Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimier u_{n+1} en fonciton de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer la quantité de liquide restant dans la bouteille au bout de 7 jours (arrondir au dixième).

Exercice 2 : En janvier 2007, Bob louait son appartement à 400€ /mois. A partir de 2008, son loyer a augmenté tous les ans de 2%. On note u_n le montant des loyers versés par Bob l'anné $2007+n$. Ainsi $u_0 = 400 \times 12 = 4800$.
Quel est le montant total des loyers versés par Bob de janvier 2007 à décembre 2014 inclus ?

Exercice 3 : Métropole juin 2013 — 6 points

Document 1

> *La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.*
>
> *En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai. Elle mesure environ* 1 900 *km ; sa puissance électrique initiale est de* 6 400 *MW ; le courant est transporté sous une tension de* 800 *kV.*

Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

Partie A : On note $p_0 = 6\,400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note p_n la puissance électrique restant dans la ligne Xiangjiaba-Shanghai au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi p_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.

1. Montrer que $p_1 = 0,997 p_0$.
2. Quelle est la puissance électrique au MW près par défaut restant dans la ligne Xiangjiaba–Shanghai au bout de 200 km ?
3. Déterminer la nature de la suite (p_n) puis exprimer p_n en fonction de n.

Partie B : On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables n : un nombre entier naturel
q : un nombre réel
p : un nombre réel
Entrée
Saisir n
Initialisation
Affecter à p la valeur 6 400
Affecter à q la valeur 0,997
Traitement
Répéter n fois
Affecter à p la valeur $p \times q$
Sortie
Afficher p

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 3$.
   Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies à l'unité près par défaut).

	n	q	p
Entrées et initialisation	3	0,997	6 400
1er passage dans la boucle de l'algorithme			
2e passage dans la boucle de l'algorithme			
3e passage dans la boucle de l'algorithme			

2. Interpréter la valeur de p obtenue au troisième passage dans la boucle de l'algorithme.
3. Quel est le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km ?

Partie C :

1. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba–Shanghai ?
2. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude.
   On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes.
   a. La ligne Xiangjiaba–Shanghai répond-t-elle à cette contrainte ?
   b. Déterminer, à cent kilomètres près, la longueur maximale d'une ligne à très haute tension en courant continu pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 7 %.

Exercice 4 : Antilles-Guyane juin 2013 4 points

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite que l'on appellera (u_n).

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1,5u$ à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$?
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,5u_n$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.
3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   a. Calculer les valeurs des termes $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1$ et S_2.
   b. Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur du terme S_n pour un n donné ?
   Écrire ce nouvel algorithme sur sa copie.
   c. Calculer le terme S_n en fonction de l'entier naturel n.
   d. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 5 : Polynésie juin 2014 4 points

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit* 374 *kg de déchets ménagers par habitant.* » Source Ademe

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux. Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.

2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.

a. Montrer que $d_1 = 0,985d_0$.

b. Déterminer la nature de la suite (d_n). Exprimer d_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (d_n).

c. Quelle devrait être, à ce rythme là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?

3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à d la valeur 400
Traitement :	Tant que $d > 374$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à d la valeur $0,985d$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

Donner la valeur affichée pour N et interpréter ce résultat.

Exercice 6 : Métropole septembre 2014 7 points

Chloé, âgée de 15 ans au 1er janvier 2014, réside dans une agglomération française. Pour anticiper le financement de son permis de conduire, elle décide de placer sur un produit d'épargne ses 600 euros d'économies à partir du 1er janvier 2014.

Information 1 : conditions de souscription du livret jeune

- Montant maximum de placement : 1 600 euros
- Taux d'intérêt annuel de 2,75 %
- Avoir entre 12 et 25 ans
- Résider en France
- Montant minimum à l'ouverture : 10 euros

Information 2 : coût moyen du permis de conduire

La loi impose un minimum de 20 heures de conduite avant de se présenter au permis.

Une enquête de la CLCV (Consommation, Logement et Cadre de Vie) publiée en août 2013 et menée auprès de 447 auto-écoles souligne que ce forfait de 20 heures est facturé du simple au double selon les régions.

Par ailleurs, même si le minimum imposé par la loi est de vingt heures de conduite, il en faut plutôt trente en moyenne.

Ainsi, en comptant les frais de dossier, il est préférable de prévoir un budget de 1 500 euros.

Partie A

1. Expliquer pourquoi Chloé remplit les conditions permettant de souscrire au livret jeune.
2. Aura-t-elle une somme suffisante disponible au 1er janvier 2017 pour passer son permis si elle choisit de souscrire au livret jeune ?

Partie B

Chloé aura besoin de 1 500 euros pour financer son permis. Ses parents lui conseillent de verser chaque mois sur le livret la somme supplémentaire de 25 euros, à partir du 1er février 2014. Ils lui expliquent que le taux annuel du livret jeune correspond à un taux mensuel de 0,226 %.

1. Ses parents lui présentent un extrait d'une page de tableur qui simule l'évolution d'épargne :

	A	B
1	01/01/2014	600,00 €
2	01/02/2014	626,36 €
3	01/03/2014	652,77 €
4	01/04/2014	679,25 €
5	01/05/2014	705,78 €
6	01/06/2014	732,38 €
7	...	...

   a. Justifier que, dans la feuille de calcul ci-dessus, la formule à saisir dans la cellule B2 est : $\boxed{= 1{,}00226 \times \text{B1} + 25}$.

   b. Déterminer la somme qui serait disponible sur le livret au 1er juillet 2014.

2. Chloé veut déterminer au bout de combien de mois elle aurait l'argent nécessaire pour financer son permis en suivant le conseil de ses parents.
   Elle décide de noter u_n la somme, en euros, disponible le n-ième mois après l'ouverture du livret. Ainsi, u_0 vaut 600 euros.

   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   b. Chloé décide d'écrire l'algorithme suivant :

Variables
 n : un nombre entier naturel
 u : un nombre réel
Initialisation
 Affecter à n la valeur 0
 Affecter à u la valeur 600
Traitement
 Tant que ......
  Affecter à n la valeur $n+1$
  Affecter à u la valeur ......
 Fin Tant que
Sortie
 Afficher ...

Trois lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter pour que Chloé puisse déterminer le nombre de mois cherché.

c. Au bout de combien de mois Chloé aura-t-elle l'argent nécessaire pour financer son permis si elle suit les conseils de ses parents ?

Exercice 7 : Nouvelle Calédonie Novembre 2013 5 points

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,4u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = -1.$$

PARTIE A :

1. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 11 premières valeurs de u_n.
On obtient les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Valeur de u_n	-1	2,6	4,04	4,616	4,8464	4,9386	4,9754	4,9902	4,9961	4,9984	4,9994

Parmi les quatre formules ci-dessous, laquelle a-t-on entrée dans la cellule C2 pour obtenir par copie vers la droite les valeurs affichées dans les cellules D2 à L2 (on indiquera la réponse sur la copie sans justification) ?

a. $= 0,4^n + 3$ **b.** $= \$B\$2 * 0,4 + 3$ **c.** $= B2 * 0,4 + 3$ **d.** $= 0,4\hat{}C1 + 3$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	p et n sont des entiers naturels, u est un nombre réel
Entrée :	saisir la valeur de p
Initialisation :	n prend la valeur 0, u prend la valeur -1
Traitement :	tant que $\|u-5\| > 10^{-p}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,4u+3$
	fin tant que
Sortie :	afficher la valeur de n

À l'aide du tableau de la question 1, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque $p = 2$.

PARTIE B :

On étudie maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$v_n = 6 \times (0,4)^n$.

1. Donner la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - v_n$. Déterminer la limite de (u_n).
4. **a.** Déterminer en fonction de n la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

   b. En déduire en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exercice 8 : Nouvelle Calédonie mars 2014 5 points

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. II peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.

On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.

On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
   Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.
5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et u sont des nombres
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à n
	Affecter la valeur 10^6 à u
Traitement :	Tant que $u > \dfrac{10^6}{2}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times 0,917$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

   a. À quoi correspond la valeur n en sortie de cet algorithme ?
   b. Si on programme cet algorithme, quel résultat affiche-t-il ?
   c. Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %.
      Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

Exercice 9 : Métropole juin 2014 6 points

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

DOCUMENT 1 :

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci-dessous.

Catégorie	**Vitesse des vents en km.h^{-1}**	**Dégâts occasionnés**
F0	60 à 120	**Dégâts légers :** dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres,...
F1	120 à 180	**Dégâts modérés :** automobiles renversées, arbres déracinés,...
F2	180 à 250	**Dégâts importants :** toits arrachés, hangars et dépendances démolis, ...
F3	250 à 330	**Dégâts considérables :** murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues, ...
F4	330 à 420	**Dégâts dévastateurs :** murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles, ...
F5	420 à 510	**Dégâts incroyables :** maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments, ...

DOCUMENT 2 :

À partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante : « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes ».
On appelle « durée de vie » d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420km.h^{-1}.
L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade. Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10*km.h*$^{-1}$.

1. **a.** Cinq minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents est de 378km.h^{-1}.
   Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
   À quelle catégorie appartient la tornade à ce moment là ?

   b. Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».
2. Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q. Il commence à élaborer l'algorithme ci-dessous.

Variables
n : un nombre entier naturel
v : un nombre réel
q : un nombre réel
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à v la valeur 420
Affecter à q la valeur 0,9
Traitement
Tant que ....
....
....
Fin Tant que
Sortie
Afficher $5 \times n$

   a. Justifier la valeur 0,9 dans la phrase « Affecter à q la valeur 0,9 ».

   b. Donner le premier terme et la raison de la suite géométrique proposée par l'étudiant.

   c. Dans l'algorithme ci-dessus, des pointillés indiquent des parties manquantes. Compléter la partie relative au traitement et la compléter pour que l'étudiant puisse déterminer la durée de vie de cette tornade.

   d. Expliquer l'instruction « Afficher $5 \times n$ » proposée par l'étudiant.
3. On désigne par (v_n) la suite géométrique proposée par l'étudiant. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Déterminer la durée de vie de cette tornade au sens défini dans le document 2.

Exercice 10 : Polynésie juin 2013 — 5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,4u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée ci-dessous :

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08
11	9	5,000 786 43
12	10	5,000 314 57
13	11	5,000 125 83
14	12	5,000 050 33
15	13	5,000 020 13
16	14	5,000 003 05
17	15	5,000 003 22
18	16	5,000 001 29

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?

3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?

4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE $U - 5 > 0,01$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur $0,4U + 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$. On admet que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $0,4$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

c. Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ?
Pourquoi ?

Exercice 11 : Métropole septembre 2013 6 points

Depuis 2000, l'Union Européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 milligrammes par kilomètre en conduite normalisée. L'objectif de l'Union Européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 milligrammes par kilomètre.

La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de 11,7 % par an.

1. **a.** Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 milligrammes par kilomètre en 2001.
   b. Un véhicule émettait 500 milligrammes par kilomètre en 2002.
   Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme tolérée cette année-là.
2. Dans le cadre d'une recherche, Louise veut déterminer à partir de quelle année l'UE atteindra son objectif.
   Louise a amorcé l'algorithme suivant :

Variables
    n : un nombre entier naturel
    p : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à p la valeur 635
Traitement
    Tant que ......
        Affecter à n la valeur $n+1$
        Affecter à p la valeur $0,883 \times p$
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher ......

   a. Expliquer l'instruction « Affecter à p la valeur $0,883 \times p$ ».
   b. Deux lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter afin de permettre à Louise de déterminer l'année recherchée.
3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la norme tolérée, exprimée en milligrammes l'année $(2000+n)$. On a ainsi $u_0 = 635$.
   a. Établir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif.

Exercice 12 : Polynésie septembre 2014 6 points

Une entreprise informatique a réalisé en 2013 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5 %.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice prévu pour l'année $2013+n$, on a donc $b_0 = 22\,000$.

Partie A

1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2014 et 2015.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer alors b_n en fonction de n.

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 22 000
Tant que B ⩽ 40 000
    N prend la valeur N + 1
    B prend la valeur 1,045 * B
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2013
Afficher A
```

1. Expliquer à quoi correspondent les variables N et B.
2. Exécuter cet algorithme et donner le dernier résultat affiché.
3. Expliquer à quoi correspond cette valeur.
4. La direction souhaite savoir à partir de quelle année le bénéfice de l'entreprise sera supérieur à 40 000 €.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $22\,000 \times 1,045^x > 40\,000$.
   b. Quel lien existe-t-il entre le résultat de la question 2. de la partie B et l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente ?

Exercice 13 : Antilles Guyane juin 2014 2 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $0,98$.
   (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2,8$ et de raison $1,02$.
   Le plus petit entier n vérifiant $u_n \leqslant v_n$ est :

   a. 14 **b.** 15 **c.** 16 **d.** 17

2. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{5}{3}$. On donne l'algorithme suivant :

Variables	n, u
Initialisation	u prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u < 1\,000$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times \frac{5}{3}$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

   Cet algorithme affiche en sortie :

   a. la valeur de $u_{1\,001}$
   b. la plus grande valeur de n vérifiant $u_n < 1\,000$
   c. la plus petite valeur de n vérifiant $u_n \geqslant 1\,000$
   d. la plus petite valeur de u_n vérifiant $u_n \geqslant 1\,000$