

~ CORRECTION DS ~

LN

Exercice 1 :

(3 points)

$$3^n \geq 1000$$

$\ln(3^n) \geq \ln(1000)$ le sens ne change pas car la fonction \ln est croissante sur les positifs

$$n \ln(3) \geq \ln(1000)$$

$$n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \quad \text{le sens ne change pas car } 3 > 1 \text{ donc } \ln(3) > 0$$

$$\frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \simeq 6.29 \quad \text{Donc l'ensemble des solutions est } [7; +\infty[$$

$$0.3^n \leq 0.001$$

$\ln(0.3^n) \leq \ln(0.001)$ le sens ne change pas car la fonction \ln est croissante sur les positifs

$$n \ln(0.3) \leq \ln(0.001)$$

$$n \geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.3)} \quad \text{le sens change car } 0.3 < 1 \text{ donc } \ln(0.3) < 0$$

$$\frac{\ln(0.001)}{\ln(0.3)} \simeq 5.73 \quad \text{Donc l'ensemble des solutions est } [6; +\infty[$$

Exercice 2 :

(3 points)

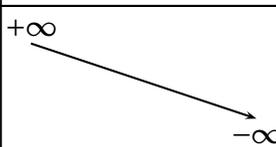
x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> + </div>			
Variation de $\ln x$				

Exercice 3 :

(14 points)

1.
 - a. Sur le graphique on voit que f est décroissante sur $]0; +\infty[$; donc sur cet intervalle $f'(x) < 0$: seuls les points de Γ ont leurs ordonnées négatives : Γ est donc la représentation de f' .
Ou encore, on voit que f est positive puis négative, donc ses primitives sont décroissantes puis croissantes. : seule la courbe C vérifie cela. Donc C est la représentation graphique de l'une des primitives de f et par élimination, Γ est la représentation de f' .
 - b. D'après la question précédente C est la représentation graphique de l'une des primitives de f . On lit sur le graphe que le point de C d'abscisse 1 a pour ordonnée 1. $F(1) = 1$.
2.
 - a. On a pour $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc par différence $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$.
 Graphiquement ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale au graphe de f .
 - b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - c. Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$
 - d. Ainsi $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1 \times x}{x \times x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-1-x}{x^2} = -\frac{x+1}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2}$.
 - e. Comme $x^2 > 0$ pour $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-x-1$.
 $-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$ et $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$.
 Comme $x > 0$, la dérivée est donc négative et ceci confirme que la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

3.
 - a. On a $H'(x) = 1 - 1 \ln x - (x-1) \times \frac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln x = f(x)$.
 H est donc une des primitives de f .
 - b. On a $H(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 = 1$ et on a vu que $F(1) = 1$, donc $F = H$ et $F(x) = x - (x-1) \ln x$.