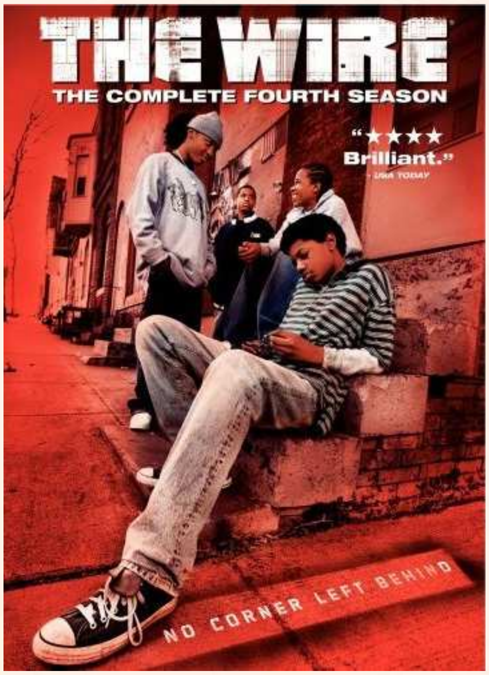
Chapitre 4

Les Fonctions Logarithmes

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- Découvrir les fonctions qui transformeent les produits en sommes
- Etudier la fonction Ln
- Etudier une fonction du type $x \longmapsto \ln(u(x))$

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 4 : LES FONCTIONS LOGARITHMES

Au fil du temps

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons deux) en aboutissant malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

I) La fonction Ln

I.1. Découverte graphique de la fonction Ln

Travail de l'élève 1 : Votre calculatrice possède une touche $\ln$ pour calculer l'image d'un nombre par la fonction appelé « logarithme népérien » (du nom de John Napier, XVIII^e qui découvrit les fonctions logarithmes).

1. Vérifiez que $\ln(5) \simeq 1.609$
2. Testez la fonction $\ln$ avec un nombre négatif de votre choix. Que constatez-vous ?
3. Observez la représentation graphique de la fonction $\ln$ sur votre calculatrice puis conjecturez graphiquement les réponses aux questions suivantes :
   - **a.** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\ln$?
   - **b.** Quel est le sens de variation de la fonction $\ln$?
     En déduire le signe de sa fonction dérivée.
   - **c.** La fonction $\ln$ possède-t-elle des asymptotes ? Si oui, préciser les équations.
   - **d.** Quelles sont les limites de la fonction $\ln$ aux bornes de son ensemble de définition.
   - **e.** Résumer cela dans un tableau.
   - **f.** Combien de solutions ont les équations $\ln(x) = 0$ et $\ln(x) = 1$? Pourquoi ?
4. En utilisant un tableau de valeurs, résoudre ces équations à 10^{-3} près.
5. Votre calculatrice contient également une touche e^x.
   - **a.** Calculer $\ln(e^1)$.
   - **b.** Conjecturer la valeur de e^1 à 10^{-3} près puis vérifier à la calculatrice.

La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0; +\infty[$. Parmi celles-ci, on s'intéresse à celle qui s'annule pour $x = 1$.

Définition 1.

On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$, l'unique primitive de la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.
Ainsi, la fonction $\ln : x \longmapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$.
De plus $\ln(1)=0$

Pour tout $x>0$ on a $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$: l'axe des ordonnées $x=0$ est asymptote verticale à la courbe réprésentative de la fonction $\ln$ et il n'y a pas d'asymptote horizontale.

Le tableau suivant résume l'ensemble de ces informations :

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $\dfrac{1}{x}$			$+$	
Variation de $\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Remarques :

- Ainsi chaque nombre de $]-\infty;+\infty[$ possède un unique antécédent par la fonction $\ln$.
  On appelle e l'unique antécédent de 1 : $\ln(e)=1$. Pour information $e \simeq 2.718$
- De plus, si a et b sont des réels positifs, alors :

$$\ln(a)=\ln(b) \iff a=b$$

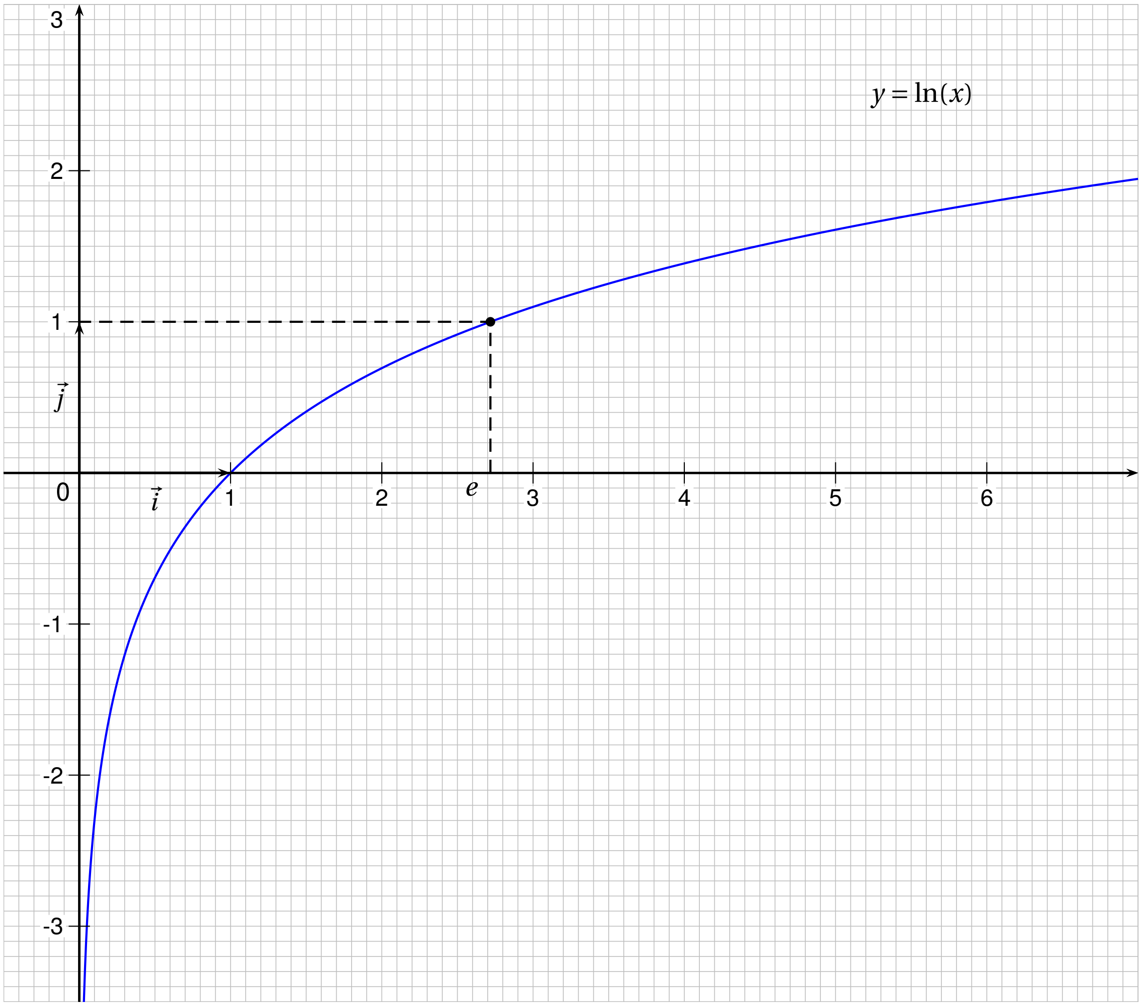
$$\ln(a)<\ln(b) \iff a<b$$

$$\ln(a)>\ln(b) \iff a>b$$

En particulier $\ln(x)<0 \iff 0<x<1$ et $\ln(x)>0 \iff x>1$ (rajouter le signe de $\ln(x)$ dans le tableau)

Exemples :

$\ln(3x+4)=0 \iff 3x+4=1 \iff 3x=-3 \iff x=-1$
$\ln(3x+4)=1 \iff 3x+4=e \iff 3x=e-4 \iff x=\dfrac{e-4}{3}$
$\ln(x^2)=\ln(4) \iff x^2=4 \iff x=2$ ou $x=-2$ Vérifier que $x^2>0$ pour les deux solutions !
$\ln(x^2-3)=\ln(2x) \iff x^2-3=2x \iff x^2-2x-3=0 \iff ... \iff x=-1$ ou $x=3$
Attention ! Si $x=-1$ alors $x^2-3<0$ donc $x=-1$ ne peut pas être solution !
$\ln(x-3)>0 \iff x-3>1 \iff x>4$
$\ln(1-x)>1 \iff 1-x>e \iff 1-e>x$
$\ln(x+3)>\ln(2x)$ ...



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Dresser son tableau de variation puis conjecturer ses limites en cas de FI.

Théorème 1. (Limites à connaître par coeur)

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exemples :

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

Déterminer les primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}$.

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $\mathrm{A}(1;1)$
2. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T pour vérifier vos résultats.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 5\ln(x)$.

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

2. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de f
3. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour vérifier vos résultats.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 5\ln(x)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de f
3. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour vérifier vos résultats.

Exercice 4 : Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ telle que $\mathrm{F}(2) = 4$.

I.2. Propriétés algébriques des logarithmes

Travail de l'élève 2 : Compléter un tableau de valeurs de la fonction $\ln$ et tenter de trouver la relation $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Parler du côté historique.

Théorème 2.

La fonction $\ln$ transforme les produits en sommes, ie pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Exemple :

$\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$

Corollaire 1.

Pour tous a et b strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
4. $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Exemple :

$\ln(64) = \ln(2^6) = 6\ln(2)$ et $\ln(0.01) = -2\ln(10)$

Application : Résoudre $(1.07)^n \geq 2$ et $\ln(0.8)^n \geq 0.3$

Exercice 5 : Résoudre $(0.9)^n \leq 0.5$ et $\ln(1.2)^n \geq 15$

I.3. Les fonctions du type $x \longmapsto \ln\big(u(x)\big)$

Limites + dérivée + primitives

II) Les fonctions Log$_a$

Travail de l'élève 3 : En fait, la fonction logarithme népérien n'est pas la seule à transformer les produits en sommes. Toutes les fonctions logarithmes le font, en particulier la fonction logarithme décimal, notée Log, définie sur $]0;+\infty[$ par Log : $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Faire un tableau de valeur pour observer cela avec les puissance de 10, faire observer sa courbe à la TI

Définition 2.

Les fonctions logarithmes en base a ...

Propriété 1.

les mêmes propriétés algébriques que ln

Exemple :

Des études statistiques montrent que, pour des intensités acoustiques et des fréquences moyennes, la sensation perçue par l'oreille humaine varie approximativement comme le logarithme de l'intensité acoustique.

Le niveau sonore L d'un son, en décibel (dB), est donné en fonction de l'intensité acoustique I, en watt par mètre carré (w/m^2), par la relation

$$\mathrm{L} = 10 log \frac{\mathrm{I}}{10^{-12}}$$

Le seuil d'audibilité $\mathrm{L} = 0$ est obtenu par $\mathrm{I} = 10^{-12}$ w/m^2.

Le seuil de douleur (seuil maximum supportable par l'oreille) est $\mathrm{L} = 130$ dB.

On se propose d'installer des éoliennes à 2000m d'une zone d'habitations.

A cette distance, le niveau sonore d'une éolienne est $\mathrm{L}_1 = 20$ dB.

1. Calculer l'intensité acoustique I_1 en w/m^2 correspondant à l'installation d'une éolienne.
2. Si on installe n éoliennes, l'intensité acoustique correspondante est, en w/m^2, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_1$
   Montrer que le niveau sonore obtenu L_n, en dB, est $\mathrm{L}_n = 20 + 10 log(n)$
3. On souhaite que le niveau sonore obtenu ne dépasse pas 30 dB.
   Quel est le nombre maximum d'éoliennes que l'on peut installer ?

Exemple :

Le pH d'un solution dépend de la concentration $[\mathrm{H_3O^+}]$ en ions hydronium $\mathrm{H_3O^+}$: $p\mathrm{H} = -log[\mathrm{H_3O^+}]$; (concentration : nombre de moles présentes dans un litre de solution).

Si pH<7, la solution est acide ; si pH=7, la solution est neutre ; si ph>7, la solution est basique.

1. Une solution A a une concentration molaire en ions $\mathrm{H_3O^+}$ égale à 3.2×10^{-7} mol/L/
   Calculer son pH. Est-elle acide ou basique ?
2. Le pH d'une solution basique est de 9. Calculer la concentration molaire en ions $\mathrm{H_3O^+}$ de cette solution.