EXERCICES : VARIABLE ALÉATOIRE

I. Activité de cours

Exercice 1. L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Exercice 2. Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Exercice 3. Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et la sa régularité.
A Groland également, on a décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 5 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 0, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 15.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

II. Exercices d'entrainement

Exercice 4. Deux lignes téléphoniques L_1 et L_2 aboutissent à un standard.
Soit A l'événement : « la ligne L_1 est occupée »
Soit B l'événement : « la ligne L_2 est occupée »
On donne les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,7 \quad ; \quad P(B) = 0,5 \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = 0,5$$

Calculer les probabilités des événements suivants :

1. E : « la ligne L_1 est libre » ;
2. F : « une ligne au moins est occupée » ;
3. G : « les deux lignes sont libres » ;
4. H : « une ligne seulement est occupée » ;
5. I : « une ligne au moins est libre » ;

Exercice 5. Dans une tombola, 100 tickets sont en jeu, répartis comme suit :

1. un ticket permet de gagner 100 euros ;
2. neuf tickets permettent de gagner 10 euros ;
3. les autres sont perdus

Pour pouvoir jouer, il faut miser 3 euros.
Un joueur mise 3 euros et tire un ticket au hasard. On appelle X son gain (différence entre ce qu'il gagne et la mise).

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il à l'avantage des joueurs ou des organisateurs de la tombola ?

Exercice 6. Une épreuve consiste à jeter trois fois de suite une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2 et 3.
Deux concurrents A et B sont en présence.
On admet qu'à chaque lancer, chacun atteint une case et une seule, et que les lancers sont indépendants.
Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2 et 3 sont les mêmes.
Pour la concurrent B, elles sont respectivement de $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}$.

1. Déterminer les probabilités des événements :
   (a) A_1 : « Le concurrent A atteint les cases 1, 2 et 3 dans cet ordre ».
   (b) A_2 : « Le concurrent A atteint les cases 1, 2 et 3 dans n'importe quel ordre ».
2. Reprendre les deux questions précédentes pour le concurrent B.
3. Quel concurrent a le plus de chance de lancer les fléchettes dans les trois cases ?

Exercice 7. On tire au hasard 20 fois de suite un nombre entier entre 0 et 9. Quelle est le probabilité de n'obtenir que des 0 ?

Exercice 8. Une urne contient 10 boules bleues, 7 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule jaune.
Un joueur tire au hasard une boule de l'urne et note sa couleur : B (bleue), R (rouge), V (verte) et J (jaune).
Il gagne 1 euro s'il tire une boule rouge, 2 euros s'il tire une boule verte, mais perd 3 euros s'il tire la boule jaune. Il ne gagne et ne perd rien s'il tire une boule bleue.
Soit G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur lors d'une partie.

1. (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $(G > 0)$.
2. Le joueur joue au même jeu que celui décrit ci-dessus, mais cette fois-ci cela se passe au Japon, où le taux du yen est de 108 yens pour un euro.
   Il doit, de plus, payer 100 yens pour jouer. Cette mise de départ ne lui est remboursée dans aucun cas.
   (a) Exprimer la variable aléatoire Y donnant le gain du joueur en yens en fonction de la variable G.
   (b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

Exercice 9. On lance n dés ($n \geq 1$).
Le jeu consiste à miser 2€, puis si on obtient au moins un 6, on remporte 3€.

1. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »
   (a) Décrire $\bar{A}$ en français puis exprimer en fonction de n la probabilité $P(\bar{A})$.
   (b) En déduire que $P(A)$ en fonction de n.
   (c) Compléter le tableau suivant :

Nombres de dés n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(A)$								

   (d) Combien de dés faut-il pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{2}{3}$?

2. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.
   (a) Donner la loi de probabilité de X en fonction de n.
   (b) Calculer E(X) en fonction de n.
   Combien de dés faut-il pour que le jeu soit favorable au joueur ? Est-on surpris ?
   (c) Calculer V(X) puis σ(X) dans ce cas. Interpréter.

Exercice 10. On dispose d'une urne contenant 10 boules blanches et des boules noires.
Une expérience consiste à piocher au hasard une boule dans l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne et piocher une seconde boule.
On associe à cette expérience la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches obtenues.

1. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{25}{64}$	1

   Combien y-a-t-il de boules noires dans l'urne ?
2. On se place dans le cas précédent et on considère le jeu suivant : pour une certaine mise, un joueur remporte 1€ par boule blanche piochée.
   Quel doit être le montant de la mise pour que le jeu soit équitable ?
3. Calculer l'écart-type dans le cas d'un jeu équitable. Que mesure ce nombre ?

Exercice 11. On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ».
   B = « tirer une boule bleue ».
   R = « tirer une boule rouge ».
   V = « tirer une boule verte ».
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :
   — rouge, on gagne 10€.
   — verte, on gagne 2€.
   — jaune ou bleue, on gagne 3€.

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.
   (a) Déduire de la question (1) : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 10)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart-type. (on arrondira l'écart-type à 10^{-2}).
3. Maintenant, on gagne toujours 10€ si la boule tirée est rouge, 2€ si elle est verte mais on gagne 3€ si elle est jaune et m€ si elle est bleue ; m désigne un réel positif.
   Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de $4,5$€.

Exercice 12. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une rouge, une bleue et une verte. On tire au hasard et successivement deux boules, on note les couleurs obtenues dans l'ordre des tirages, la première boule étant replacée dans l'urne avant le second tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité associé à cette expérience aléatoire.
2. On instaure la règle suivante : le tirage d'une boule rouge rapporte un point, celui d'une verte deux points d'une verte fait perdre trois points.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T définie par la somme des points marqués dans l'expérience précédente.
   (b) Calculer l'espérance de T. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer la probabilité pour un joueur de perdre la partie, c'est-à-dire d'avoir un total négatifde points.

III. Simulation

Exercice 13. Dans un jeu de pile ou face, on gagne le double de sa mise si l'on obtient pile, on perd sa mise si l'on obtient face. Un joueur qui dispose de 1000 €commence par miser un euro, double sa mise tant qu'il perd et ne s'arrête que s'il gagne ou ne peut plus miser.

1. Proposer une simulation de ce jeu.
2. Estimer à l'aide de la simulation l'espérance du gain du joueur.

Exercice 14. On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 50. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres de ce nombre.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.
3. Déterminer $p(X \leq 5)$ et $p(X \geq 10)$.
4. Une machine demande 13 €pour donner un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 50, on gagne alors la somme des chiffres du nombre obtenu.
   Ecrire un algorithme affichant le gain à ce jeu.
5. Ce jeu est-il favorable ?

IV. Un exemple de devoir

Exercice 15. (10 points)
Dans la ville des chats, le chat Croquette participe à des matchs de « lancers de souris ».
Un match consiste à lancer deux fois une souris en l'air et à tenter de la rattraper. Croquette estime que sa probabilité de rattraper une souris est toujours égale à 0.7

1. Croquette gagne 5€ à chaque fois qu'il rattrape une souris et perd 10€ à chaque fois que la souris retombe au sol.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le gain de Croquette lors d'un match (donc lors de deux lancers).
   (a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer E(X). Interpréter.
   (d) Calculer V(X).
   (e) Calculer σ(X). Interpréter.
   (f) Croquette a joué 433 matchs cette année. Estimer son gain.
2. En Egypte, les chats jouent au même jeu que Croquette, mais cette fois-ci, le taux de la Livre Egyptienne (LE) est de 8 LE pour 1€.
   De plus, un chat doit payer 10 LE pour jouer et cette mise de départ ne lui est remboursée dans aucun cas.
   On appelle Y la variable aléatoire qui compte le gain d'un chat en LE lors d'un match.
   (a) Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de la variable aléatoire X du 1).
   (b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de Y.

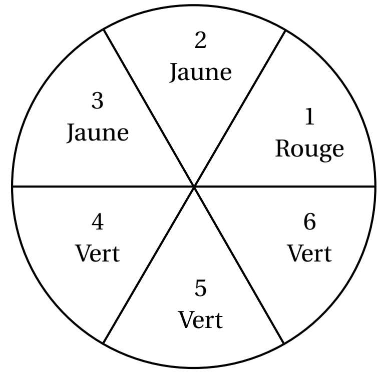
Exercice 16. (4 points)
Anouk et Wanda participent à deux jeux différents. Les variables aléatoires A et W donnant leurs gains respectifs ont les lois de probabilités suivantes :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(A = k)$	0.1	0.3	0.1	0.3	0.1	0.1
$P(W = k)$	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2

A l'aide de la calculatrice (inutile d'écrire les formules sur votre copie) :

1. Donner et comparer E(A) et E(W). Interpréter.
2. Donner et comparer σ(A) et σ(W). Interpréter.

Exercice 17. (6 points)



Une roue d'une loterie est divisée en six secteurs de même aire : 1 Rouge (R), 2 jaunes (J) et 3 verts (V).
On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un repère fléchée indique l'un des six secteurs de manière équiprobable.
Un joueur perd 2€ si la flèche indique un secteur Vert, gagne 0.50€ si la flèche indique un secteur Jaune et x euros si la flèche indique un secteur Rouge.
On appelle G la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. (a) Donner la loi de probabilité de G en fonction de x.
   (b) Calculer E(G) en fonction de x.
   (c) Comment choisir x pour que le jeu soit équitable ?
2. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : *Roulette*

Données: Secteur, i, N sont des nombres entiers
Effectif est une liste à trois éléments Saisir N
Effectif[1], Effectif[2] et Effectif[3] prennent la valeur 0.
Pour i allant de 1 à N **Faire**
  Secteur prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 6
  Si (Secteur == 1) **Alors**
    Effectif [1] prend la valeur Effectif[1]+1
  Sinon
    Si (Secteur == 2 OU Secteur == 3) **Alors**
      Effectif [2] prend la valeur Effectif[2]+1
    Sinon
      Effectif [3] prend la valeur Effectif[3]+1
    Fin Si
  Fin Si
Fin Pour
Afficher « Vous avez obtenu Effectif[1] fois le secteur Rouge »
Afficher « Vous avez obtenu Effectif[2] fois le secteur Jaune. »
Afficher « Vous avez obtenu Effectif[3] fois le secteur Vert. »

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Préciser le rôle de chacune des variables.
   (c) Que doit-on rajouter si l'on veut que l'algorithme renvoit aussi le gain moyen d'un joueur par partie ?