Exercices : Vecteurs et droites

I. Colinéarité

Exercice 1. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(6;2)$, $B(-2;-3)$ et $C(17;9)$.

Que dire des points A, B et C ?

Si le point D a pour coordonnées $(120;75)$ le quadrilatère BADO est-il un trapèze ?

Exercice 2. ABCD est un rectangle.

E est le symétrique de C par rapport à B, F est le symétrique de A par rapport à D, G est le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, démontrer que G, E et F sont alignés.
3. Soit H le point d'intersection de (EF) et (CD). Exprimer $\overrightarrow{DH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3. ABCD est un tétraèdre. Dans le plan (ABC), le point K est défini par :

$$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure puis une deuxième dans le plan (ABC).
2. En choisissant un repère du plan (ABC), démontrer que B, K et C sont alignés.

II. Décompostion dans une base

Exercice 4. On considère ABCD un parallélogramme non aplati.

1. Donner la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CA}$ dans chacune des bases suivantes :

   (a) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

   (b) $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$.

   (c) $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ avec $\vec{u}=2\overrightarrow{CB}$ et $\vec{v}=-0,5\overrightarrow{CD}$.
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.

Exercice 5. Soit ABC un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$, le point J est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, et le point K est défini par la relation vectorielle :

$$-3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}+10\overrightarrow{CK}=\vec{0}$$

1. Montrer que les points I, J et K sont alignés.
2. Préciser la position de K sur (IJ).

Exercice 6. A, B et C sont trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Le but de l'exercice est de démontrer par deux méthodes que les points D, E et F sont alignés puis de comparer ces deux méthodes.
Faire une figure.

PARTIE A. **méthode 1**

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.
3. En déduire celles des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ et démontrer que D, E et F sont alignés.

PARTIE B. **méthode 2**

1. Ecrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires. Conclure.

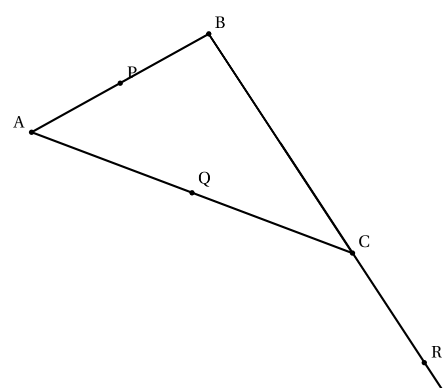
PARTIE C. **Comparaison des deux méthodes**

1. Comparer les relations vectorielles trouvées dans la partie B avec les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ trouvées dans la partie A. Commenter.

Exercice 7. Soit ABC un triangle et a un réel.
On considère les points P, Q et R définis par :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CQ} = a\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{CR} = a\overrightarrow{CB}$$

La figure ci-contre correspond au cas où $a = \dfrac{1}{2}$



Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles les points P, Q et R sont alignés ?

Exercice 8. **Démonstration de cours**

On considère trois points du plan A, B et C non alignés.
Soit M un point du plan.

1. **Existence**
   La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en P et la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en Q.
   (a) Réaliser une figure.
   (b) Montrer qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ et un réel y tel que $\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC}$.
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère APMQ ? Justifier.
   (d) En déduire l'expression de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. **Unicité**
Suppsons maintenant qu'il existe deux couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ tels que :
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC}$$
   (a) Démontrer que $(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que $x = x'$ et que $y = y'$.
   (c) Conclure.

Exercice 9. Soit un triangle RST et K le milieu de [RS].

1. Construire les points H et L tels que :
$$\overrightarrow{TH} = -3\overrightarrow{TR} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SL} = -2\overrightarrow{ST}$$
2. Montrer que $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TK}$.
3. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HL}$ sur $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$
4. En déduire que (HL) et (TK) sont parallèles.

Exercice 10. Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.
Le but de cet exercice est de démontrer par deux méthodes différentes que D, E *et* F *sont alignés.*

1. (a) Décomposer $\overrightarrow{DE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.
   (b) Décomposer $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.
   (c) Démontrer que D, E et F sont alignés.
2. La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.
   (a) Démontrer que E est le milieu de [AI].
   (b) En déduire que I est le milieu de [EB].
   (c) Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure.

Exercice 11. ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BD] et K celui de [JC]. E est le point du segment [AE] tel que $AE = \dfrac{2}{3}AJ$ et F est le point du segment [BC] tel que $BF = \dfrac{2}{3}BC$.

1. Faire une figure.
2. On se place dans le plan (ABD). Faire une figure (dans le plan (ABD)) puis démontrer que I, E et D sont alignés.
3. On se place dans le plan (BCD). Démontrer que F, K et D sont alignés.
4. (a) Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?
   (b) En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

III. Vecteurs directeurs et droites

Exercice 12. On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$.

Exercice 13. On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(15; -10)$ et $B(-25; 30)$.

Exercice 14. On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(5;-1)$ et parallèle à la droite d_1 dont une équation cartésienne est $2x-7y=2$.
2. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation réduite $y=-\dfrac{2}{7}x+3$.

Exercice 15.

1. Tracer la droite (AB) avec $A(2;-3)$ et $B(4;-5)$.
2. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).

Exercice 16. Quel est le coefficient directeur d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ avec :

1. $\vec{u}(1;-3)$
2. $\vec{u}(-2;4)$
3. $\vec{u}(5;-2)$
4. $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4};2\right)$

Exercice 17. Soit d la droite d'équation $2x-3y=-7$.

1. Le point $A(-2;1)$ appartient-il à d ?
2. Même question avec $B\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$ et $C\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\dfrac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\dfrac{1}{5}$.

Exercice 18. Placer les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
   (b) Déterminer les coordonnées de D.
2. (a) Soit $d: 6x+y=14$.
   Vérifier que B et D appartiennent à d.
   (b) Trouver une équation cartésienne de la droite (AC).
   (c) Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
   (d) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.
3. (a) Calculer les coordonnées de K milieu de [AB] et de L milieu de [CD].
   (b) Démontrer que les points E, K et L sont alignés.

Exercice 19. Soit m un réel et d la droite d'équation

$$x+my+3=0$$

Peut-on trouver m tel que :

1. $\vec{u}(3;2)$ soit un vecteur directeur de d.
2. $A(-2;3)$ appartienne à d.
3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x-y=0$.
4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.
5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.
6. d passe par l'origine du repère.
7. d passe par le point $J(0;1)$.

Exercice 20. Dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;-1)$ et $C(6;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le milieu I de [AC] et parallèle à (AB).
3. Δ est la droite d'équation $-16x + y = -98$
   (a) Prouver que Δ et (AB) sont sécantes en D de coordonnées à déterminer.
   (b) Montrer que le milieu J de [DC] est un point de d de deux manières différentes.

Exercice 21. Soit ABC un triangle non aplati.
Pour tout réel t, on considère le point M_t défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BM_t} = t\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$$

1. Construire sur la même figure M_0, M_1 et M_{-1}.
2. Déterminer et construire le lieu géométrique des points M_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Soit ABCD un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (CD). Soit I le milieu du côté [AB] et J celui du côté [CD]. On nomme K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].
On veut démontrer que M, I, J et K sont alignés.

1. Justifier que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère.
2. Donner les coordonnées de A, B, D et I dans ce repère.
3. On nomme a l'abscisse du point C dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer, en fonction de a, les coordonnées de C et de J.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) et en déduire les coordonnées de M.
5. Montrer que les points M, I et J sont alignés.
6. Déterminer une équation cartésienne de (BD) et de (AC). En déduire les coordonnées de K.
7. Conclure.

IV. Un exemple de devoir

Exercice 23. ABC est un triangle quelconque. Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire un schéma de la situation.
   On veut montrer de deux manières différentes que les points A, P *et* N *sont alignés.*
2. **Solution analytique dans le repère** $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ **:**
   (a) Expliquer pourquoi $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
   (b) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et N dans ce repère ?
   (c) Calculer les coordonnées du point P.
   (d) Montrer que les points A, P et N sont alignés.
3. **Solution vectorielle (sans repère, on utilisera donc pas les résultats de la question 2.) :**
   (a) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AP}$, où k est un réel à déterminer.
   (c) Expliquer alors pourquoi les points A, P et N sont alignés.

Exercice 24. Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère les points $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(4;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   (b) Donner un vecteur directeur de la droite (AB) d'ordonnée 1.
   (c) Trouver le point D de la droite (AB) d'ordonnée 1.
3. (a) Donner une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et passant par le point A.
   (b) Le point $E\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ appartient-il à la droite d ?
4. (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$.
   (b) Que peut-on dire des droites (BE) et (AC) ? Justifier.
5. (a) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (CE) est $5x + 7y - 13 = 0$.
   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection F des droites (AB) et (CE).

Exercice 25. Dans un repère, d est la droite d'équation

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a;b) \neq (0;0)$$

Expliquer le rôle de l'algorithme ci-contre, dont les variables sont les réels a, b et c.

Algorithme 1 : *Droites*

Données: a, b et c sont des nombres réels
Saisir a, b, c.
Si ($a \neq 0$) **Alors**
  Afficher « Point $A\left(-\frac{c}{a};0\right)$ » ...
Sinon
  Afficher « Pas de point d'intersection. »
Fin Si