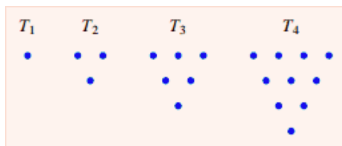
EXERCICES : SUITES NUMÉRIQUES

I. Définir une suite - Algorithme

Exercice 1. Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis conjecturer une formule explicite du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

Exercice 2. Voici les 4 premiers nombres triangulaires :

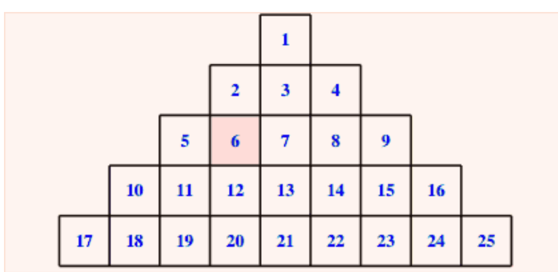


1. Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.
2. Définir la suite T puis proposer un algorithme permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n.
3. A l'aide d'un programme donner T_{12} et T_{60}.
4. Ecrire et programmer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

   (a) $T_n \geq 100$

   (b) $T_n \geq 1000$

Exercice 3. Nombres pyramidaux .
On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous. On représentera un nombre par le numéro de la ligne qui le contient et par son rang dans la ligne à partir de la gauche. Par exemple, 6. Le nombre 6 est au second rang de la troisième ligne. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2 013 ? Quel est son rang dans cette ligne ?



Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante :

$$u_0 = 2 \qquad u_1 = 1+\frac{1}{2} \qquad u_2 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \qquad u_3 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

et ainsi de suite.

1. Exprimer sous la forme de fraction irréductible les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Donner une définition par récurrence de la suite u.
3. Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n puis à l'aide de votre programme donner u_5, u_{10}, u_{20} et u_{50} à 10^{-4} près.
4. Conjecturer la limite de la suite u.

Exercice 5. On donne :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 15 \quad ; \quad u_4 = 31 \quad ; \quad u_5 = 63 \quad ; \quad u_6 = 127$$

1. Donner u_7.
2. Proposer une formule donnant u_{n+1} en fonction de u_n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.
3. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par le programme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u et A sont des nombres réels.
i, n et A sont des nombres entiers.
$u := 1$
Entrer n et A
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  $u := \frac{1}{2}\left(u + \frac{A}{u}\right)$
Fin Pour
Afficher u

1. Donner la définition par récurrence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Pour $A = 2$.
   (a) Calculer u_0 ; u_1 et u_2.
   (b) Que semble calculer la suite (u_n) ?
3. Choisir une autre valeur de A et reprendre la question précédente.

Cette suite s'appelle la suite de Héron

Exercice 7. On considère les suites w et s définies par les algorithmes suivants :

PARTIE A. **La suite w**

Algorithme 2 :

Données: w est un nombre réel.
i et n sont des nombres entiers naturels.
Entrer n
$w := 4 \times (-1)^n + 1$
Afficher w.

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme ?
2. Que fait cet algorithme ?
3. Compléter :

$$\begin{cases} w_{2n} = \ldots\ldots \\ w_{2n+1} = \ldots\ldots \end{cases}$$

PARTIE B. **La suite s**

Algorithme 3 :

Données: s est un nombre réel.
i et n sont des nombres entiers naturels.
$s := -1$
Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  $s := \sqrt{\frac{1+s}{2}}$
  Afficher s
Fin Pour

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme ?
2. Que fait cet algorithme ?
3. Donner une définition de la suite u par récurrence.
4. Modifier l'algorithme pour qu'il n'affiche que le terme de rang n.

Exercice 8. La suite u est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2 - 3n$

II. Sens de variation

Exercice 9. Etudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 3-2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = -2+5n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$. avec $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

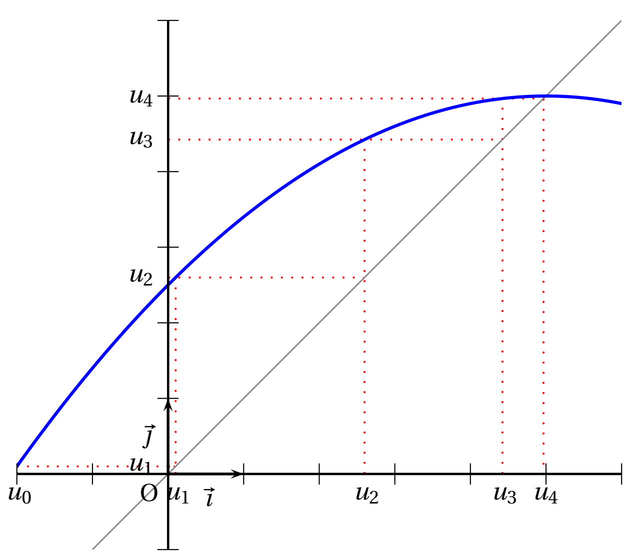
Exercice 10.

1. La suite u est définie pour tout $n \geq 1$ par :
$$u_n = 1+\frac{10}{n}$$
En étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$, montrer que la suite u est décroissante à partir de $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n-n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang à préciser.
3. Montrer que la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2-10n+16$ est croissante à partir d'un certain rang à préciser.
4. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2-3n+1$.
   (a) Montrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang à préciser en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$.
   (b) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-3x+1$ et retrouver le résultat précédent.
5. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - n$.
Montrer que la suite u est croissante.

III. Représentation graphique

Exercice 11.

1. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f ($\mathscr{C}_f : y = -0,1(x-5)^2+5$)et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. On a représenté les cinq premiers termes de la suite u définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.



   (a) Donner, par lecture graphique, u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

(b) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, puis calculer les valeurs des termes u_1 à u_4 à partir de la valeur u_0 lue à la question précédente.

(c) On modifie la valeur $u_0 = 0$. Calculer les premiers à partir de u_0.

(d) Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u avec donc $u_0 = 0$.

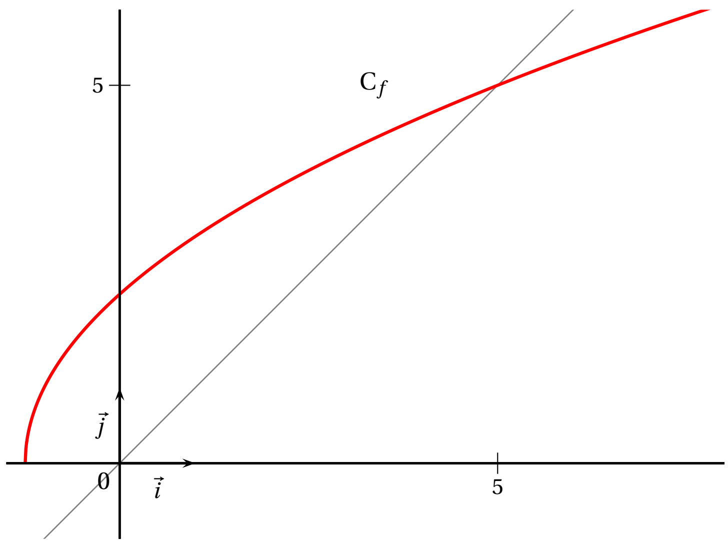
Exercice 12. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

1. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.
2. Conjecturer le sens de variation de la fonction u.
3. Conjecturer la valeur limite ℓ de la suite u.



Exercice 13. On considère la suite u définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

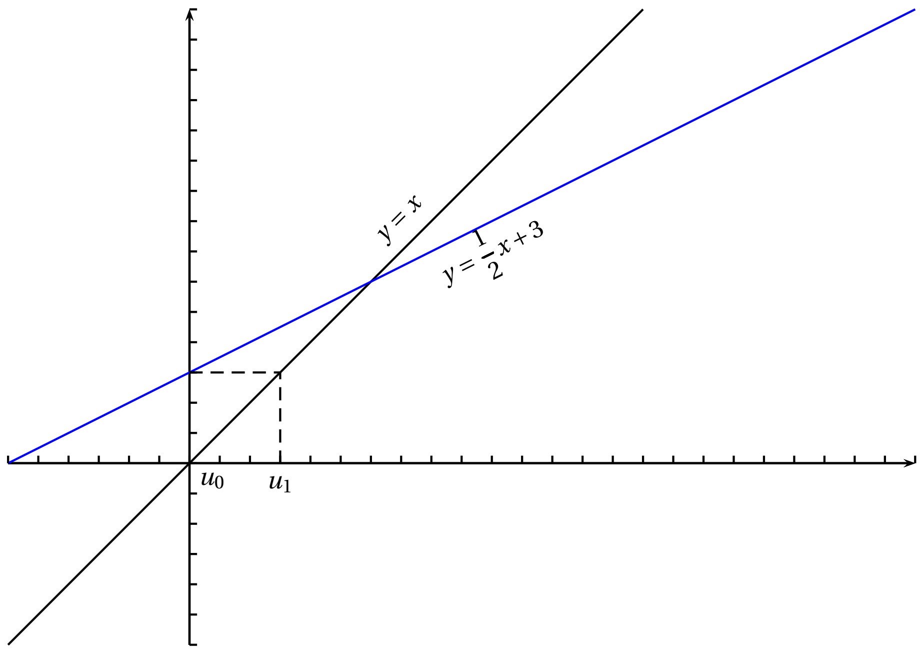
1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 0$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
3. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 15$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
4. Que constate-t-on ?

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.

2. Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$. A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.
3. Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?



IV. Limite

Exercice 15. Sans justification, dans chaque cas, déterminer si la suite converge en présicant sa limite éventuelle :

1. La suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$
2. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = (-1)^n \times n$$
3. La suite w est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$w_n = n - \frac{1}{n+1}$$
4. La suite s est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$s_n = \frac{1}{n}$$
5. La suite t est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$t_n = (-1)^n + n$$
6. La suite p est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$p_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 16. Une suite u est décroissante et converge vers 0.
La suite v est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
Dans chaque cas, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s) :

1. Si la suite v a tous ces termes positifs alors :

(a) La suite v est décroissante.
(b) La suite v est convergente.
(c) La suite v a une limite $\ell < 0$.

2. Si La suite v est croissante alors :

   (a) la suite v a tous ses termes négatifs ou nuls.
   (b) la suite v est convergente.
   (c) la suite v converge vers 0.

Exercice 17. Proposer un exemple de suite u telle que :

1. u est décroissante et converge vers 1.
2. u n'admet pas de limite.
3. u diverge vers $-\infty$.
4. u est croissante et converge vers π.

Exercice 18. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = -1 + \frac{1}{n}$$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 4 :

Données: u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
ε est un nombre réel strictement positif. $u := 0$ et $p := 1$
Entrer ε
Tant que ($u \notin]-1-\varepsilon; -1+\varepsilon[$) **Faire**
   $u := -1 + \dfrac{1}{p}$ et $p := p+1$
Fin Tant que
Afficher $p-1$.

   (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $\varepsilon = 0.3$? $\varepsilon = 0,1$? $\varepsilon = 10^{-3}$?
   (b) Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait :

$$u_n \in]-1-\varepsilon; -1+\varepsilon[$$

   (c) Que vient-on de démontrer ?

Exercice 19. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 3$$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 5 :

Données: u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
A est un nombre réel strictement positif.
$u := -3$ et $p := 0$
Entrer A
Tant que ($u < \mathrm{A}$) **Faire**
    $u := p^2 - 3$ et $p := p + 1$
Fin Tant que
Afficher $p - 1$.

(a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $\mathrm{A} = 30$? $\mathrm{A} = 1000$? $\mathrm{A} = 10^6$?

(b) Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait :

$$u_n > \mathrm{A}$$

(c) Que vient-on de démontrer ?

<u>Exercice</u> 20. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 - 3n$$

Rédiger un énoncé d'exercice sur le modèle des deux précédents, puis répondre à chacune des questions.

V. Un exemple de devoir

Exercice 21.

1. On considère la suite u définie par l'algorithme suivant :

Algorithme 6 :

Données: u est un nombre réel.
i et n sont des nombres entiers naturels.
$u := 5$
Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  $u := \frac{2}{3}u + 1$
  Afficher u
Fin Pour

   (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 4$?

   (b) Que fait cet algorithme ?

2. On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

   (a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (b) Dans un repère à l'aide de la représentation graphique de la fonction f et la droite $\mathscr{D} : y = x$ (que l'on tracera), placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.

   (c) Conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite ℓ.

3. **On admet que** la suite u peut se définir pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

   (a) Vérifier cette formule en calculant u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

   (c) En déduire le sens de variation de la suite u.

Exercice 22. Lors d'une soirée de ski nocturne, Augustin apprend à prendre le téléski en snowboard.
La première fois, il parcourt 40 mètres.
Puis, à chaque tentative, il réussit à tenir sur la perche 5 mètres de plus que la fois précédente.
Le téléski mesure 300 mètres de long.

1. Combien devra-t-il faire de tentatives pour arriver au sommet ?
2. Le téléski avance à la vitesse de 4 mètres par seconde.
   Combien de temps Augustin aura-t-il passé sur le téléski ?

Exercice 23. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$$

1. A l'aide des droites $\mathscr{D} : y = x$ et $\mathscr{D}' : y = 2x - 2$ donnée ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3.
2. Conjecturer la limite de la suite u.
3. Calculer les 4 premiers termes de la suite u.
4. **Algorithme 7 :**

   Données: u est un nombre réel.
   p est un nombre entier naturel.
   A est un nombre réel strictement positif. $u := 3$ et $p := 0$
   Entrer A
   Tant que ($u < \text{A}$) **Faire**
   $\quad u := 2u - 2$ et $p := p + 1$
   Fin Tant que
   Afficher p.

   (a) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $\text{A} = 30$?
   (b) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $\text{A} = 100$? s'il entre $\text{A} = 10000$?