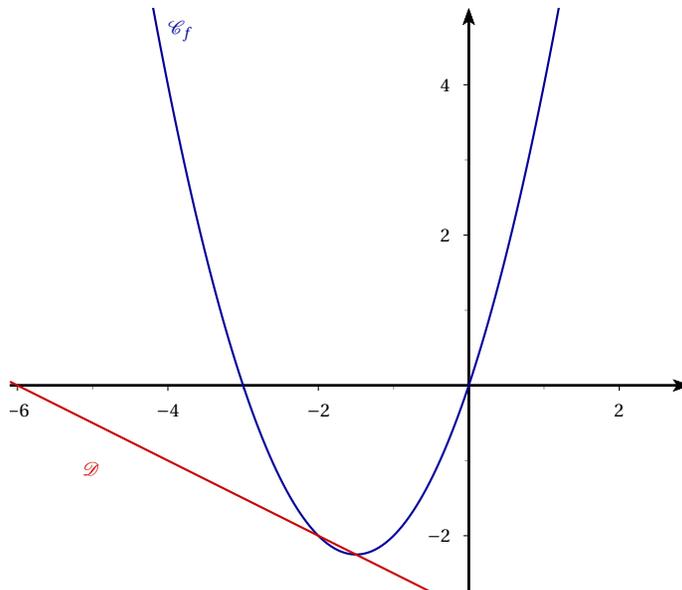


EXERCICES : SECOND DEGRÉ

Exercice 1.

Dans un repère du plan, on a tracé la parabole \mathcal{P} représentant la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ et la droite $\mathcal{D} : y = -0,5x - 3$.

1. Montrer que \mathcal{D} et \mathcal{P} ont deux points communs et déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. \mathcal{P} semble couper l'axe des abscisses en deux points. Préciser ces points.



Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1. (a) $2x^2 + x - 10 = 0$ (c) $-x^2 + 7x - 6 = 0$
 (b) $1,2x^2 + 0,4x + 2,3 = 0$ (d) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$

2. Donner, lorsque c'est possible, une factorisation des trinômes de la question précédente.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $5x^2 - 9x = 0$ 3. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $-x^2 + 11 = 0$ 4. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 4. Déterminer, si elles existent, les coordonnées des points d'intersection de la parabole \mathcal{P} représentant la fonction f avec la droite \mathcal{D} dans les cas suivants :

1. $f : x \mapsto 5x^2 - 3x + 2$ et $\mathcal{D} : y = -3x + 7$
2. $f : x \mapsto -x^2 + x + 1$ et $\mathcal{D} : y = 3x - 7$
3. $f : x \mapsto 3x^2 + x + 2$ et $\mathcal{D} : y = 2$
4. $f : x \mapsto -3x^2 + 7x + 12$ et $\mathcal{D} : y = 5x + 14$
5. $f : x \mapsto 0,5x^2 - 3,2x + 2,8$ et $\mathcal{D} : x = 4$

Exercice 5.

1. Etudier, suivant les valeurs du réel x , les signes des trinômes suivants :

(a) $P(x) = 3x^2 + 6x - 9$

(b) $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$

2. Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation (I) :

$$\frac{-6x - 21}{-x^2 - 4x - 4} > 3$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $2x^2 + x - 10 > 0$

4. $-9x^2 - 6x - 1 < 0$

2. $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$

5. $-x^2 + 8x - 23 < 0$

3. $4x^2 - 36x + 81 \leq 0$

6. $-2x^2 + 2x + 40 \geq 0$

Exercice 7.

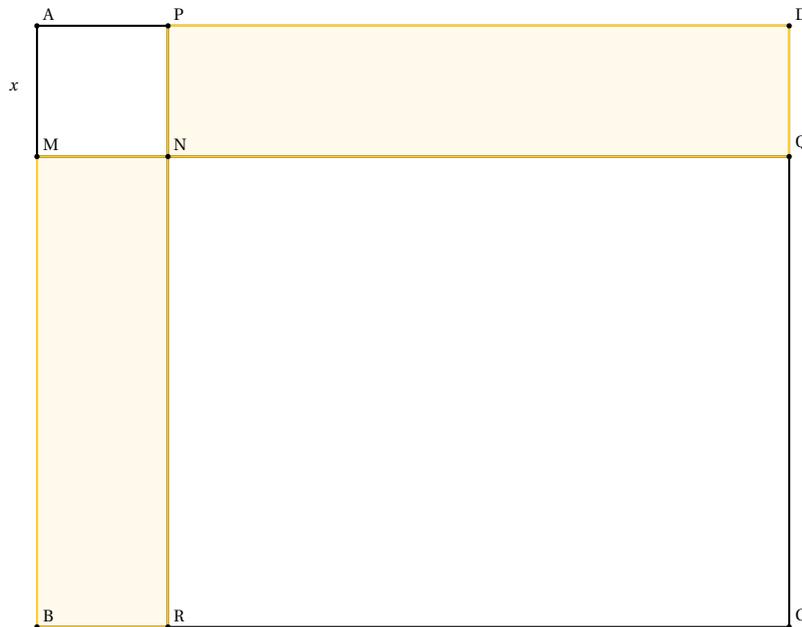
1. Factoriser les trinômes :

(a) $2x^2 + 3x - 2$;

(b) $2x^2 - 9x + 4$.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (E) :

$$\frac{1}{2x^2 + 3x - 2} + \frac{x}{2x^2 - 9x + 4} = 0$$

Exercice 8. Dans un rectangle ABCD tel que $AB = 8$ et $BC = 10$, on construit le carré AMNP avec M sur [AB] et P sur [AD]. On construit ensuite les rectangles MBRN et PNQD avec R sur [BC] et Q sur [DC] que l'on colorie en jaune. On pose $x = AM$; x appartient donc à $[0; 8]$.

1. Exprimer en fonction de x l'aire totale $v(x)$ des deux rectangles coloriés en jaune.
2. Pour quelle valeur de x , $v(x)$ est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $[-5; 10]$ par $f(x) = (4 - x)(x + 3)$.

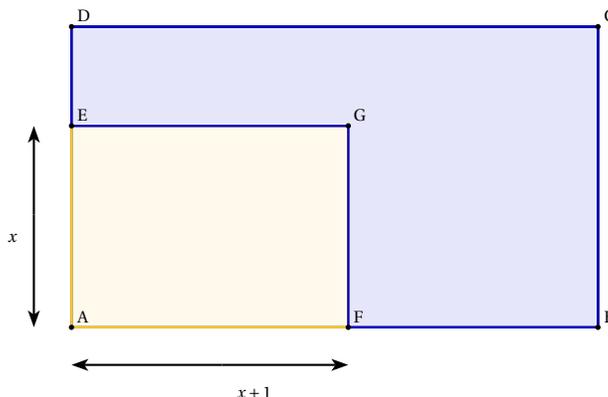
1. Vérifier que f est une fonction trinôme ; décrire l'allure de sa représentation graphique \mathcal{P} .

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du sommet S de \mathcal{P} .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 10. On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 7$ et $BC = 4$.

Etant donné un réel x compris entre 0 et 4, on place E sur le segment [AD] et F sur le segment [AB] tels que $AE = x$ et $AF = x + 1$. On place G tel que EAFG soit un rectangle.

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle EAFG est-elle au moins égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD ?



Exercice 11. Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions on donnera ses racines).

1.

x	$-\infty$	11	$+\infty$
$f(x)$			

3.

x	$-\infty$	4,5	$+\infty$
$f(x)$			

2.

x	$-\infty$	-1,2	$+\infty$
$f(x)$			

4.

x	$-\infty$	-12	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 12. On considère l'inéquation :

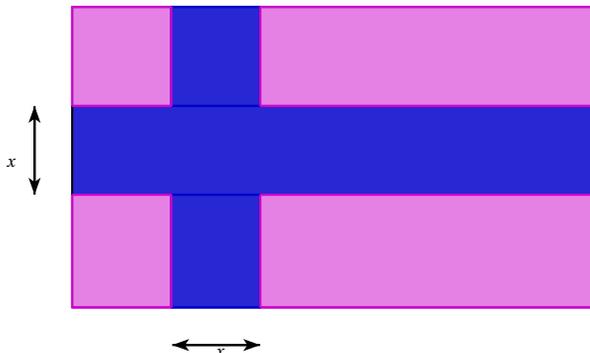
$$3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$$

1. Déterminer les racines du trinôme $3X^2 - 13X + 4$.
2. En déduire une factorisation de $3X^2 - 13X + 4$.
3. Résoudre alors l'inéquation proposée dans \mathbb{R} .

Exercice 13. Pour chaque question, on donnera toutes les solutions possibles.

1. Deux entiers relatifs consécutifs ont la somme de leurs carrés qui vaut 5725. Déterminer ces entiers.
2. Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2030.

Exercice 14. On considère un drapeau de 3 m sur 5 m, orné d'une croix. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les parties bleu et rose aient la même aire ?



Exercice 15.

1. Déterminer selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation :

$$x^2 - 4x - 5 = k$$

2. Déterminer selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation :

$$x^2 + 2x + 4 = kx$$

Exercice 16.

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 25$ cm. L'aire du triangle ABC est 84 cm^2 . Déterminer les dimensions du triangle ABC.
2. DEF est un triangle isocèle en E avec $DE = 25$ cm. L'aire du triangle DEF est 168 cm^2 . Déterminer les valeurs possibles du périmètre de DEF.
3. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 221 m^2 et le périmètre 60 m.

Exercice 17. Les élèves d'une classe de première vont visiter un musée. Ils ont à leur charge le coût des entrées. Le musée a établi un tarif de groupe d'un montant de 168 €. Un professeur récolte l'argent auprès des élèves participants. Finalement deux élèves ne peuvent pas venir et chacun des autres élèves doit payer 0,40 € supplémentaire.

On note x le nombre d'élèves de la classe.

1. Exprimer de deux manières, en fonction de x , le prix initialement demandé à chaque élève.
2. En déduire le nombre d'élèves dans la classe.

Exercice 18.

Un problème de Léonard Euler

J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de plus, j'aurais eu chaque pièce pour 3 écus de moins. Combien ai-je acheté de pièces de tissu ?

Exercice 19. On considère l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $y = \frac{2}{x}$ et les droites \mathcal{D}_m d'équations : $y = m(x + 1) - 2$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que les droites \mathcal{D}_m passent par un point fixe C, indépendant de m et que C appartient à \mathcal{H} .
2. Représenter sur l'écran d'une calculatrice la courbe \mathcal{H} et les droites \mathcal{D}_m pour les valeurs de m entières comprises entre -1 et 5 .
3. Combien de points communs semblent avoir \mathcal{H} et \mathcal{D}_m ?
4. Démontrer qu'il existe une et une seule valeur non nulle de m pour laquelle \mathcal{H} et \mathcal{D}_m ont seulement le point C en commun. Préciser cette valeur de m .

On dit que la droite \mathcal{D}_m correspondant à cette valeur est la tangente à \mathcal{H} en C.

Exercice 20.

Probabilité et second degré

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et m boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ». B = « tirer une boule bleue ». R = « tirer une boule rouge ». V = « tirer une boule verte ».
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante, si la boule tirée est :
 - rouge, on gagne 10 €.
 - verte, on gagne $5m$ €
 - jaune ou bleue, on gagne $-1 - 2m$ €.

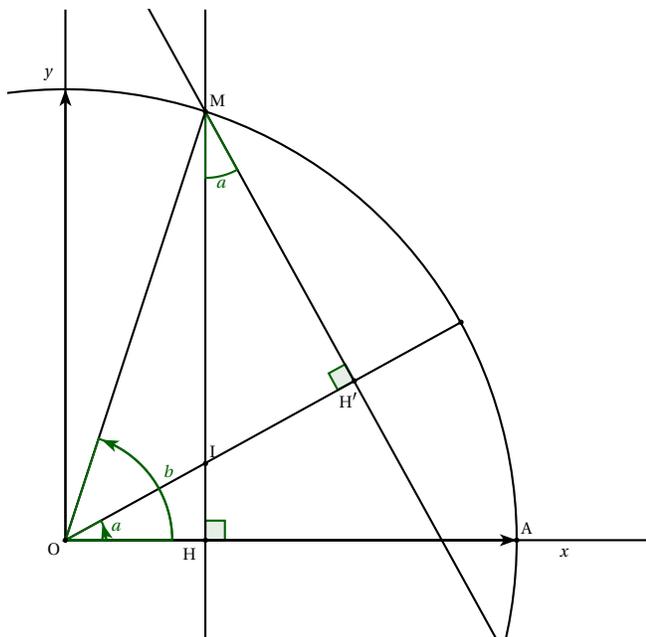
Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

- (a) Déduire de la question (1) : $p(X = 10)$, $p(X = -1 - 2m)$ et $P(X = 5m)$.
- (b) Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €. En déduire dans ce cas l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 21. Considérons le dessin suivant, dans laquelle la longueur $OA = 1$:

PARTIE A.

Formule trigonométrique



Dans cette partie, les triangles dans lesquels vous raisonnez devront apparaître clairement.

1. Montrer que

$$\cos(a + b) = OI \cos a$$

2. En déduire que :

$$\cos(a + b) = (\cos b - IH') \cos a$$

3. En montrant que $IH' = MH' \tan a$ puis que $MH' = \sin b$, conclure que :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

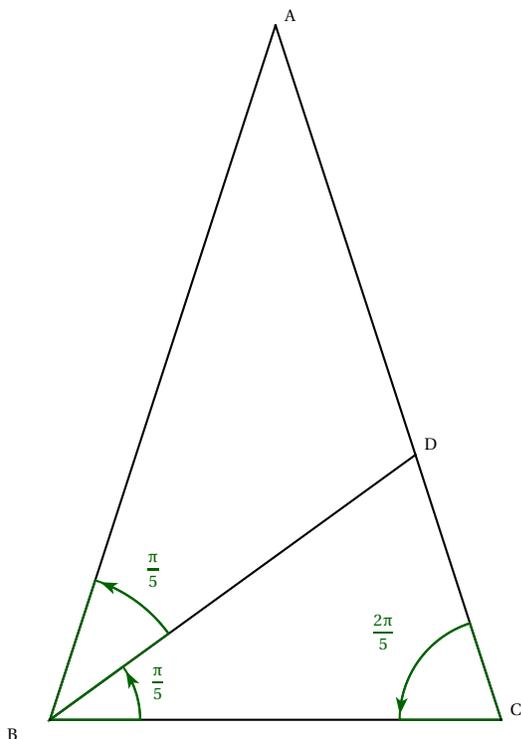
4. En déduire que :

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

PARTIE B.

Triangle d'or

ABC est un triangle isocèle en A avec $BC = 2$ et $(\vec{BC}; \vec{BA}) = \frac{2\pi}{5}$ rad. (BD) est la bissectrice de l'angle $(\vec{BC}; \vec{BA})$ comme représenté ci-dessous.



1. Démontrer que BDC et BDA sont des triangles isocèles, en déduire les longueurs BD et AD.

2. On trace, dans le triangle ABC, la hauteur issue de A qui coupe [BC] en H puis, dans le triangle BDC, on trace la hauteur issue de B qui coupe [DC] en H'.

- (a) Démontrer que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{AB} \quad \text{et} \quad DC = 4 \cos \frac{2\pi}{5}$$

- (b) Démontrer que $AB - DC = 2$ et en déduire que :

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

- (c) Résoudre l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

- (d) Déduire de la **partie A** la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$.

- (e) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

EXEMPLE DE DEVOIR

Exercice 22.

(6 points)

1. Dresser le tableau de signe des trinômes suivants :

(a) $-2x^2 + 5x + 4$

(c) $4x^2 + 4x + 1$

(b) $3x^2 - 7x + 5$

(d) $x^2 - x - 1$

2. Pour chacun des trinômes précédents donner, si possible, une factorisation.

3. En vous servant des tableaux de signes de la première question, donner l'ensemble des solutions \mathcal{S} des équations et inéquations suivantes :

(a) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$

(c) $4x^2 + 4x + 1 < 0$

(b) $3x^2 - 7x + 5 \geq 0$

(d) $x^2 - x - 1 \leq 0$

Exercice 23.

(4 points)

On donne les équations des paraboles \mathcal{P} et \mathcal{P}' :

$$\mathcal{P} : y = x^2 - 6x + 10 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : y = -2x^2 + 18x - 30$$

1. Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles \mathcal{P} et \mathcal{P}' avec l'axe des abscisses.2. Déterminer les éventuels points d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' .**Exercice 24.**

(4 points)

On dispose de deux boîtes B_1 et B_2 contenant chacune des boules blanches et des boules noires, indiscernables au toucher. La boîte B_1 contient n boules noires et 1 boule blanche ; la boîte B_2 contient n boules noires et 3 boules blanches (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1). On tire au hasard une boule dans la boîte B_1 puis une boule dans la boîte B_2 .

1. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire cette expérience aléatoire.

2. Déterminer l'entier n tel que la probabilité de tirer successivement deux boules blanches soit égale à $\frac{1}{120}$.3. Déterminer l'entier n tel que la probabilité de tirer successivement deux boules noires soit égale à $\frac{25}{32}$.4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la probabilité de tirer successivement deux boules blanches est strictement inférieure à $\frac{1}{1000}$.**Exercice 25.**

(4 points)

1. Six entiers naturels consécutifs sont tels que le produit des deux plus petits nombres est égal au triple de la somme des quatre plus grands. Déterminer ces six entiers.

2. Trouver toutes les suites de 5 entiers consécutifs tels que la somme des carrés des trois premiers nombres soit égale à la somme des carrés des deux derniers.

Exercice 26.

(4 points)

1. On considère la trinôme suivant : $x^2 - (2m + 3)x + m^2$ Pour quelle valeur de m a-t-il une unique racine ?

Calculer alors la valeur de cette racine.

2. On considère la courbe $\mathcal{C}_f : y = 3x^2 - 2x + 1$ et la droite $\mathcal{D} : y = m$.Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles \mathcal{C}_f et \mathcal{D} ont exactement deux points d'intersection.**Exercice 27.****Question Cactus**

Un automobiliste se rend de Colmar à Nancy, villes distantes de 150 km. Au retour, sa vitesse moyenne est supérieure de 25 km.h⁻¹ à celle qu'il a réalisée à l'aller. Déterminer ces deux vitesses sachant qu'il roulé pendant exactement cinq heures.