2014-2015

Lycée Jean Durand

Mathématiques

Cours

Les Nombres Réels

Rédaction :

David Zancanaro

Réalisé à l'aide de :

LaTeX

Table des matières

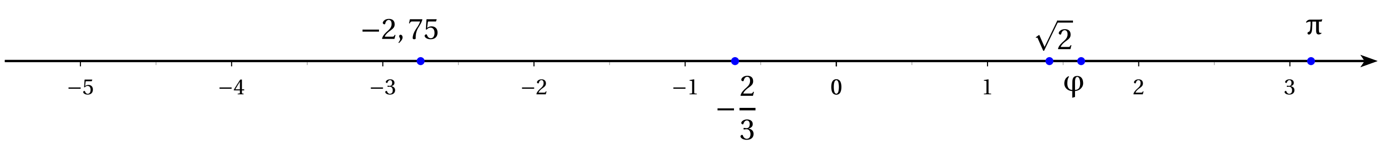
I. Les nombres réels : définitions et généralités

I.1. Définitions et notations

Définition 1.

Un <u>nombre réel</u> est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.
En particulier, chaque nombre réel correspond à un unique point sur une droite graduée (que l'on appelle abscisse du point) et réciproquement à chaque point d'une droite graduée correspond un unique nombre réel.

Notations : L'ensemble de tous les nombres réels se note $\mathbb{R}$.



I.2. Exemples de nombres réels avec quelques unes de leurs particularités

⋆) 0 est le seul nombre à la fois positif et négatif ; il est le plus petit des entiers naturels. Il est encore l'élément neutre de l'addition c'est-à-dire quelque soit le nombre réel x on a :

$$x + 0 = 0 + x = x$$

Il sert de base pour définir l'opposé d'un nombre réel x : tout nombre réel x admet un unique opposé $-x$ qui vérifie :

$$x + (-x) = 0$$

C'est la propriété que l'on utilise pour équilibrer et résoudre les équations.

⋆) 1 est le plus petit entier naturel strictement positif ; il est aussi l'élément neutre de la multiplication c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{on a} \qquad x \times 1 = 1 \times x = x$$

Il sert de base pour définir l'inverse d'un nombre réel non nul x : tout nombre réel x distinct de 0 admet un unique inverse $\dfrac{1}{x}$ qui vérifie :

$$x \times \frac{1}{x} = 1$$

Il s'agit de l'autre propriété que l'on utilise pour équilibrer et résoudre les équations.

Exemple :
On cherche le nombre réel x qui vérifie $3x+2=0$.
L'opposé de 2 est -2 que l'on ajoute aux deux membres de l'équation ce qui donne :

$$3x+2-2=0-2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3x=-2$$

Enfin l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ et l'on multiplie les deux membres de l'équation par $\frac{1}{3}$ ce qui donne :

$$\frac{1}{3}\times 3x=-2\times\frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x=-\frac{2}{3}$$

L'équation admet une unique solution qui est le nombre réel $-\frac{2}{3}$; nous pouvons vérifier que ce nombre est bien solution :

$$3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2+2=0$$

⋆) 11 est un nombre entier naturel (c'est-à-dire un nombre entier positif). 11 est aussi un nombre premier c'est-à-dire un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs distincts de 1 et de lui-même. 2 est le plus petit des nombres premiers et est le seul nombre pair premier ; en effet tout autre nombre pair n'est pas premier puisqu'on peut le diviser par 2 (ex : $4=2\times 2$ ou $6=2\times 3$). Voici une liste des plus petits nombres premiers :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad \dots$$

⋆) $-2,75$ est un nombre décimal qui a la particularité d'être négatif. Comme tout nombre décimal son écriture « décimale » admet un nombre de chiffre fini après la virgule. Par exemple le nombre $\frac{1}{3}$ dont l'écriture décimale comporte une infinité de 3 après la virgule n'est pas un nombre décimal. On peut choisir d'écrire $-2,75$ sous forme de fraction :

$$-2,75=\frac{-275}{100}=-\frac{11}{4}$$

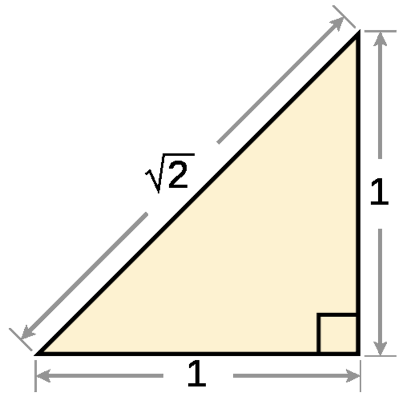
et d'une manière générale un même nombre admet bien des écritures différentes...

⋆) $-\frac{2}{3}$ est une fraction négative ; dès lors que l'on peut écrire un nombre sous forme de fraction on dit qu'il s'agit d'un nombre **rationnel**. Pendant longtemps l'homme pensait que tous les nombres réels étaient des nombres rationnels ; c'est-à-dire qu'il était possible de tous les écrire sous forme de fraction.

⋆) $\sqrt{2}$ est un nombre qui ne peut pas être écrit sous forme de fraction. On dit qu'il est irrationnel. Pour avoir démontré ce résultat on raconte qu'Hippase de Métaponte fut jeté à la mer car contredisant la philosophie Pythagoricienne...
Tous les nombres irrationnels ont une écriture décimale infini et non périodique, ainsi pour connaître les décimales de $\sqrt{2}$ les mathématiciens ont inventé des méthodes, des algorithmes, retenons que :

$$\sqrt{2}\simeq 1,41$$

D'un point de vue géométrique la diagonale d'un carré de côté 1 a pour longueur $\sqrt{2}$. Ce résultat est une conséquence du théorème de Pythagore.



⋆) Le nombre d'or : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le nombre d'or est un nombre mythique ; définissant une sorte de proportion idéal pour les figures géométriques ; certains le voient partout : dans les proportions de la pyramide de Khéops, Léonard de Vinci l'utilise pour quelques unes de ses peintures, dans la coquille d'un escargot, etc...
Il s'agit d'un nombre irrationnel, comme $\sqrt{2}$.
Approximativement le nombre d'or vaut :

$$\varphi \simeq 1{,}618$$

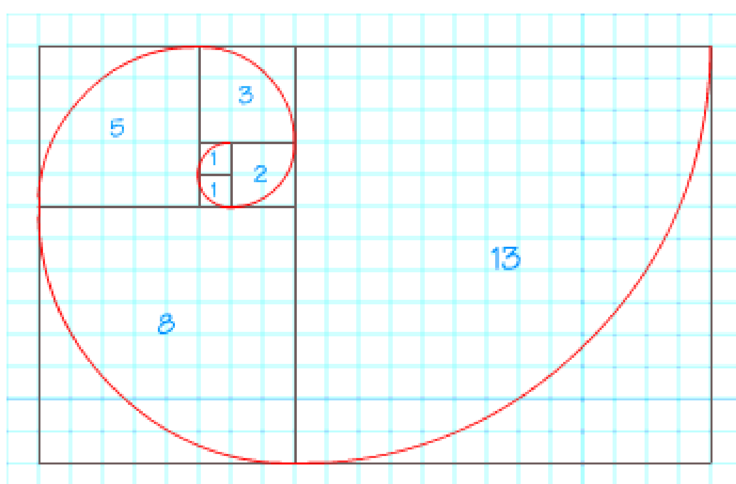
En partant de la suite de nombre suivante (appelé suite de Fibonacci) :

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad \ldots$$

(on obtient un nombre en additionnant les deux précédents)
le rapport de deux nombres successifs se rapproche de plus en plus du nombre d'or :

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad \frac{13}{8} \simeq 1{,}625 \qquad \frac{21}{13} = 1{,}615$$

En utilisant les termes de cette suite voici une construction de la « spirale d'or » qui rappelle la coquille des escargots…



⋆) Le fameux nombre π. Si on double le diamètre d'un cercle alors on double son périmètre ; idem si on triple le diamètre, etc... On a constaté que la circonférence d'un cercle est proportionnelle à son diamètre ; autrement dit il existe une constante qu'on appelle π telle que le périmètre du cercle vaut :

$$\pi \times d = 2\pi r$$

avec r la longueur du rayon et $d = 2r$ celle du diamètre. Approximativement ce nombre vaut $\pi \simeq 3,14$. Précisément découvrir la valeur exacte de π ou plutôt les décimales de π a constitué un des défis majeurs des mathématiciens ; jusqu'en 1400 on connaissait à peine 10 décimales de π ; vers 1700 on en connaissait 100 et en 2010 en utilisant des ordinateurs on en connaissait aux alentours de 5000 milliards...

Les formules utilisées pour découvrir de nouvelles décimales sont particulièrement complexes, citons par exemple l'une des formules du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

A retenir : π est un nombre irrationnel ; on ne peut donc pas l'écrire sous forme de fraction. Bien que π paraisse très spécial, la plupart des nombres sont des nombres irrationnels tels que π et c'est plutôt les nombres dont on a parlé plus tôt qui sont très spéciaux.

Question non résolue : On ne sait pas si π est un nombre univers (un nombre univers est un nombre réel dans lequel on peut trouver n'importe quelle succession de chiffres de longueur finie).

Exercice 1. **Des écritures différentes pour un même nombre**

Considérons $a = 0,9999\cdots = 0,\underline{9}$. Le but de l'exercice est de démontrer que a et 1 sont **exactement** le même nombre. Ce résultat est particulièrement contre intuitif.

1. Démontrer que :
$$10a = 9 + a$$
2. Résoudre l'équation $10a = 9 + a$.
3. Conclure.

Exercice 2.

1. Effectuer les quatre opérations suivantes en moins de 20 secondes chacune :
$$3 + \frac{1}{4} \qquad 5 \times \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{7} + \frac{1}{5} \qquad \frac{3}{4} \div \frac{2}{7}$$
2. Compléter les égalités manquantes en moins de 30 secondes chacune.
$$4+\ldots = 2\times 6 \qquad 5-\ldots = -2\times(-3) \qquad 2+3\times\ldots = 4 \qquad 2x+5 = x-2+\ldots$$
3. Répondre à chaque problème posé en moins d'une minute chacun.
   — Dans une classe de seconde, il y a 15 garçons et 20 filles. Les deux-tiers des garçons et le quart des filles sont demi-pensionnaires. Combien y-a-t-il d'élèves de cette classe demi-pensionnaires ?
   — Dans un triangle rectangle en C, le côté [AB] mesure 6 cm, le côté [BC] mesure 5 cm. Donner la valeur exacte de la longueur du côté [AC].

Exercice 3. **Somme et différence**

Trouver deux nombres entiers dont la somme vaut 281 et dont la différence vaut 111.

Exercice 4. **Division euclidienne**

La somme de deux entiers naturels x et y est 157. Dans la division euclidienne de x par y, le quotient vaut 6 et le reste 17. Déterminer x et y.

Exercice 5.

1. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

   (a) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}$ (c) $\dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{5}}$ (d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+2}}}$

2. (a) La somme des inverses de deux nombres est-elle égale à l'inverse de la somme de ces deux nombres ?

   (b) La différence des inverses de deux nombres est-elle égale à l'inverse de la différence de ces deux nombres ?

Exercice 6. On donne $\sqrt{2}\simeq 1.41$ et $\sqrt{3}\simeq 1.73$. **Ordre de grandeur, sans calculatrice**

1. Pouvez-vous donner facilement (et sans calculatrice) un ordre de grandeur des valeurs suivantes ?

$$\mathrm{A}=\sqrt{72}+\sqrt{32}-6\sqrt{8} \qquad \mathrm{B}=\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \mathrm{C}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

2. (a) Ecrire A en fonction de $\sqrt{2}$. En déduire un ordre de grandeur de A.

   (b) Ecrire B sous la forme d'une fraction de dénominateur 2. En déduire un ordre de grandeur de B.

   (c) Montrer que $\mathrm{C}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. En déduire un ordre de grandeur de C.

3. Déterminer un ordre de grandeur des valeurs suivantes, après avoir changer leur écriture :

$$\mathrm{D}=\sqrt{2}\times\sqrt{54} \qquad \mathrm{E}=\sqrt{\frac{4}{3}} \qquad \mathrm{F}=\frac{2}{1-\sqrt{3}} \qquad \mathrm{G}=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}}$$

4. **Application** : Un triangle rectangle isocèle a son hypoténuse qui mesure 10 cm.
   Déterminer un ordre de grandeur de la longueur des deux autres côtés

Exercice 7. Tracer un segment d'une longueur quelconque, à l'aide uniquement de la règle non graduée et du compas, diviser ce segment en trois segments égaux. Expliquer votre démarche.

Exercice 8.

1. Calculer $(3\sqrt{5}-4)^2$ et $(2\sqrt{6}-5)^2$
2. En déduire une autre écriture de $\sqrt{61-24\sqrt{5}}$ et $\sqrt{49-20\sqrt{6}}$

Exercice 9. **Sans calculatrice**

Le but de cet exercice est de calculer le nombre suivant sans calculatrice :

$$\mathrm{A}=83\,875\,683\,470^2-83\,875\,683\,469\times 83\,875\,683\,471$$

1. On pose $a = 83\,875\,683\,470$. Exprimer A en fonction de a, puis en simplifiant déterminer A.
2. Conclure.

Exercice 10. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On pose :

$$a = \frac{p+1}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p-1}{2}$$

1. Donner la liste des 10 plus petit nombres premiers.
2. Justifier que a et b sont des nombres entiers.
3. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p.
4. En déduire que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.
   Donner cette différence pour $p = 29$.

Exercice 11. Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel.
Qu'en est-il de la somme de deux nombres irrationnels ?

Exercice 12. Un triangle a des côtés qui mesurent $x + 4$ cm, x cm et 9 cm.
Le côté de $x + 4$ cm est le côté le plus long.
Déterminer x pour que ce triangle soit un triangle rectangle.

Exercice 13. La somme de cinq nombres entiers consécutifs vaut 1515. Déterminer ces cinq nombres.

Exercice 14. Pour assister à un mach de foot, un groupe de 21 personnes a payé 90 € de plus qu'un groupe de 12 personnes.
Sachant que toutes les places sont au même prix, quel est le prix, en euros, d'une place

Exercice 15. À ce jour, l'âge du capitaine est le double de celui de Fred. Dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans. Quel est l'âge du capitaine ?

Exercice 16. La somme de trois nombres pairs consécutifs est égale à 378.
Quels sont ces trois nombres ?

Exercice 17. Dans une classe de 3e , deux septièmes des élèves apprennent l'allemand, la moitié des élèves apprennent l'espagnol, et les six restants apprennent l'italien.
Combien y a t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 18. j'ai deux fois l'age que vous aviez lorsque j'avais l'age que vous avez. Lorsque vous aurez mon age, nous aurons à nous deux 63 ans. quel est mon age ?

II. Ensembles de nombres - Notations - Relations et Ensembles

II.1. Définition

Définition 2.

Un ensemble représente une collection d'objets. Les objets de la collection sont les éléments de l'ensemble. Un ensemble peut être constitué d'une infinité d'élements ou d'un nombre fini d'élément ou même d'aucun élément (c'est le cas de l'ensemble vide qui se note $\emptyset$).

Exemple :

Notons E l'ensemble des trois derniers présidents de la république française. On utilise les accolades pour écrire un ensemble ayant un nombre fini d'éléments ; ainsi :

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{H}ollande ; \mathrm{S}arkozy ; \mathrm{C}hirac\}$$

Notons F l'ensemble des deux derniers présidents (qui se revendiquent de droite) de la république française :

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{S}arkozy ; \mathrm{C}hirac\}$$

Enfin notons G l'ensemble des deux derniers présidents (qui se revendiquent de gauche) de la république française :

$$\mathrm{G} = \{\mathrm{M}itt\acute{e}rand ; \mathrm{H}ollande\}$$

Pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble on utilise les symboles $\in$ et $\notin$. Ainsi $\mathrm{S}arkozy \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{S}arkozy \notin \mathrm{G}$ ou encore $\mathrm{H}ollande \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{H}ollande \notin \mathrm{F}$.

Définition 3.

Si tous les éléments d'un ensemble E appartiennent aussi à un ensemble F alors on dit que l'ensemble E est contenu dans l'ensemble F, on écrit alors $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. Dans le cas contraire on écrit $\mathrm{E} \not\subset \mathrm{F}$.

Exemple :

En reprenant l'exemple des présidents français on a par exemple $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \not\subset \mathrm{E}$.

II.2. Opération sur les ensembles

Définition 4.

Il est possible de réunir les ensembles E et F pour en former un nouveau G ; on note alors :

$$\mathrm{G} = \mathrm{E} \cup \mathrm{F}$$

On lit G est la réunion des ensembles E et F.

Exemple :
En reprenant l'exemple des présidents français on a par exemple $\mathrm{E} \cup \mathrm{G} = \{Mitt\acute{e}rand; Hollande; Sarkozy; Chirac\}$.

Définition 5.

Les éléments commun à deux ensembles E et F forment un nouvel ensemble G appelé intersection de E et F que l'on note :

$$\mathrm{E} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}$$

Exemple :

En reprenant l'exemple des présidents français on a par exemple $\mathrm{E} \cap \mathrm{G} = \{Hollande\}$.

Définition 6.

Considérons l'ensemble E et un ensemble F contenu dans l'ensemble E, alors le contraire de l'ensemble F dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans E, on le note $\overline{\mathrm{F}}$.

Exemple :
Soit E l'ensemble des 32 cartes d'un jeu classique ; F l'ensemble des piques et G l'ensemble des rois alors le contraire de F dans E est l'ensemble $\overline{\mathrm{F}}$ des coeurs, des carreaux et des trèfles et le contraire de G dans E est l'ensemble $\overline{\mathrm{G}}$ des 28 cartes du paquet qui ne sont pas des rois.

Exercice 19. On considère l'ensemble E des nombres entiers naturels inférieur ou égal à 30 et l'ensemble F des nombre premier inférieur ou égaux à 30.

1. Combien d'éléments contient E ? Lister les éléments de F et compléter F . . . E.
2. Soit G l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à 30 ; donner le contraire de G dans E.
3. Donner $\mathrm{G} \cap \mathrm{F}$ et $\mathrm{G} \cup \mathrm{F}$.

II.3. Ensemble de nombre

Pour noter les ensembles de nombres on utilise des lettres de l'alphabet que l'on écrit avec une double barre comme l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ces ensembles sont particuliers car ils possèdent une infinité d'éléments.

Notations :
L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.

L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots;-4;-3;-2;0;1;2;3;\ldots\}$. Les élémlents de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

II.4. Quantificateur

Pour exprimer qu'une proposition est vraie quelque soit le nombre réel x on utilise le quantificateur universel $\forall$ qui signifie pour tout ou quelque soit et on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+2 > x$$

On lit : Quelque soit le nombre réel x alors $x+2$ est strictement supérieur à x.

Pour exprimer qu'une proposition est vraie pour au moins un nombre réel x on utilise le quantificateur existentiel $\exists$ qui signifie « il existe au moins ».

$$\exists x \in \mathbb{Q}, 100 \times x \in \mathbb{N}$$

Cette phrase se traduit par : « Il existe au moins un nombre rationnel tel que multiplier par 100 ce nombre soit un entier naturel ».

En effet c'est le cas de $x = 2,51 = \dfrac{251}{100}$ puisque $100 \times 2,51 = 251$ est un entier naturel.

Une autre phrase qui mélange les deux quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N} \text{ et } \forall q \neq 0 \in \mathbb{Z}\text{on a } x \neq \frac{p}{q}$$

Une traduction : « Il existe au moins un nombre réel qui ne pas être écrit sous forme de fraction d'entier. » C'est par exemple le cas de $\sqrt{2}$ ou de π.

Exercice 20. Traduire les propositions mathématiques en français puis dire si elles sont vraies ou fausses :
$\forall$ signifie pour tout ou quelque soit ; $\exists$ signifie il existe.

1. $\forall x \in \mathbb{Z}$ alors $x > 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x^2 \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{N}$.
3. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $x^2 \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{Q}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ alors $x + y \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Traduire les propositions écrites en français en langage mathématiques dans le cas où elles sont vraies, dans le cas contraire corriger ses propositions et les écrire en langage mathématiques :

1. Quelque soit le nombre réel x alors il existe un nombre réel y tel que $x + y = 0$.
2. Quelque soit le nombre réel x alors il existe un nombre réel y tel que $x \times y = 1$.
3. Soit x un nombre réel strictement supérieur à 2 alors $2 - x$ est strictement supérieur à 0.
4. L'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est contenu dans l'ensemble des nombres rationnels.

III. Intervalle de $\mathbb{R}$

III.1. Définition

Définition 7.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a; b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle $[a; b]$.

Remarque : On dit qu'un intervalle est borné si et seulement si ses deux bornes sont finies (ie réels).

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exemples :

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3};\sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5};+\infty\right[$$

III.2. Manipulation d'inégalité

Exercice 22.

1. Supposons que $x \in [1;5]$ et $y \in [2;7]$. Encadrer xy, $x+y$, $x-y$ et $\frac{x}{y}$.
2. Dans chacun des cas suivants donner l'intervalle dans lequel se situe le nombre x :

   (a) $2 \leq 2x+3 \leq 7$

   (b) $-3x+1 \leq 7$

   (c) $-4x+\frac{1}{2} > \frac{7}{3}$

   (d) $x(x+2) < x^2$

   (e) $-1 \leq -x+1 < 8$

   (f) $x^2 > 4$