Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

Pour chaque question, donner la bonne réponse. **Justifier.**

Soit x un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

1. $\cos^2\frac{x}{3}+\sin^2\frac{x}{3}=$

   (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 1 (d) 0

   On sait que :

   $$\forall X\in\mathbb{R}, \cos^2 X+\sin^2 X=1$$

   En particulier, pour $X=\frac{x}{3}$ on obtient $\cos^2\frac{x}{3}+\sin^2\frac{x}{3}=1$, réponse *c*.

2. On sait que $\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Alors, $\cos x$ est égal à :

   (a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (c) $\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (d) $\frac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

   On utilise la même propriété que précédemment, et donc :

   $$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Longleftrightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$$

   Or $\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ donc :

   $$\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}=\frac{16-(2-2\sqrt{12}+6)}{16}=\frac{16-2+4\sqrt{3}-6}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

   Or puisque x est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ il suit que $\cos x\geq 0$ d'où :

   $$\cos x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

   Réponse b

3. On sait que le réel x de la question précédente prend une des valeurs suivantes. Laquelle ?

   (a) $-\frac{5\pi}{12}$ (b) $-\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{5\pi}{12}$

   On sait que $\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}<0$ donc $x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$, par conséquent la bonne réponse est soit la réponse *a*, soit la réponse *b*.
   Puisque $-\frac{\pi}{4}>-\frac{5\pi}{12}$ il suit que $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ c'est-à-dire on a :

   $$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)<\sqrt{2}/2$$

   Pour les mêmes raisons on a

   $$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)>\sqrt{2}/2$$

   Or, $\cos(x)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\simeq 0.97>\sqrt{2}/2$; par conséquent seule la réponse *b* convient.

Exercice 2. (4 points)

Soient M, N, P, Q et R des points tels que :

$$\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right)=\frac{3\pi}{4}\quad,\quad\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MR}\right)=-\frac{2\pi}{3}\quad\text{et}\quad\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MP}\right)=-\frac{5\pi}{12}$$

Aucune figure n'est exigée. On pourra utiliser le formulaire ci-après

1. Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MR}\right)$.
   On applique la relation de Chasles afin de faire intervenir les mesures d'angle données dans l'énoncé. Toutes les mesures sont à considérer à 2π près :

   $$\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MP}\right)=\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MN}\right)+\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right)$$

   Utilisons désormais le deuxième rappel :

   $$\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MR}\right)=-\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MP}\right)-\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right)=-\left(-\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi-9\pi-8\pi}{12}=-\pi$$

   On en déduit que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MR}\right)=\pi$ rad.
2. Que peut-on en déduire ?
   L'angle $\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MR}\right)$ est plat, on en déduit que les points M, N et P sont alignés.

Formulaire :

1. Quelque soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tous non nuls on a :

   $$(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{w})+(\vec{w};\vec{v})+2k\pi\qquad\text{où}\quad k\in\mathbb{Z}$$

2. Quelque soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls on a :

   $$(\vec{u};\vec{v})=-(\vec{v};\vec{u})+2k\pi\qquad\text{où}\quad k\in\mathbb{Z}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

Pour chaque question, donner la bonne réponse. **Justifier.**
Soit x un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

1. $\cos^2(2x)+\sin^2(2x)=$

   (a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) 0

   On sait que :
   $$\forall \mathrm{X}\in\mathbb{R}, \cos^2\mathrm{X}+\sin^2\mathrm{X}=1$$
   En particulier, pour $\mathrm{X}=2x$ on obtient $\cos^2(2x)+\sin^2(2x)=1$, réponse c.

2. On sait que $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. Alors, $\sin x$ est égal à :

   (a) $\dfrac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$ (c) $\dfrac{-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ (d) $\dfrac{-\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$

   On utilise la même propriété que précédemment, et donc :
   $$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \iff \sin^2 x=1-\cos^2 x$$
   Or $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ donc :
   $$\sin^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}=\frac{16-(5+2\sqrt{5}+1)}{16}=\frac{16-5-2\sqrt{5}-1}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{2(5-\sqrt{5})}{4}$$
   Or puisque x est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ il suit que $\sin x\geq 0$ d'où :
   $$\sin x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
   Réponse a

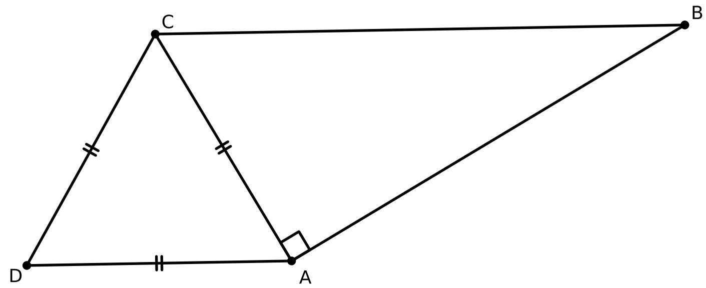
3. On sait que le réel x de la question précédente prend une des valeurs suivantes. Laquelle ?

   (a) $-\dfrac{2\pi}{5}$ (b) $-\dfrac{\pi}{5}$ (c) $\dfrac{\pi}{5}$ (d) $\dfrac{2\pi}{5}$

   Compte tenu du fait que x est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ les réponses a et b ne conviennent pas. Un dessin représentant approximativement les angles qui correspondent à $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ montre qu'on a :
   $$\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2\simeq 0,7 \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{2\pi}{5}<\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2\simeq 0,7$$
   Or on sait que $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\simeq 0,81$, on en déduit que $x=\dfrac{\pi}{5}$ est la seule réponse possible.

Exercice 2. (4 points)

On considère le triangle ABC de sens direct rectangle en A. De plus, $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.
Le triangle ACD est équilatéral de sens direct.



Déterminer, en justifiant, les mesures principales en radians des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

Remarque : On pourra utiliser le formulaire ci-après. Pour la troisième mesure on pourra introduire le vecteur $\overrightarrow{DA}$ *en utilisant la relation de Chasles.*

D'après la relation de Chasles on a :

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$$

Or, $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ puisque le triangle ACD est équilatéral et $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ puisque le triangle ACD est rectangle d'où :

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{-2\pi-3\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{3}$$

D'après la relation de Chasles et en utilisant l'indication on a :

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$$

Donc la mesure principale de $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$ est $\dfrac{5\pi}{6}$ radians.
Enfin comme la somme des angles d'un triangle vaut π on a :

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Formulaire :

1. Quelque soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tous non nuls on a :

$$(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{w})+(\vec{w};\vec{v})+2k\pi \qquad \text{où} \quad k\in\mathbb{Z}$$

2. Quelque soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls on a :

$$(\vec{u};\vec{v})=-(\vec{v};\vec{u})+2k\pi \qquad \text{où} \quad k\in\mathbb{Z}$$

3. Soit A, B et C trois points distincts alors on a :

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)+2k\pi \qquad \text{où} \quad k\in\mathbb{Z}$$