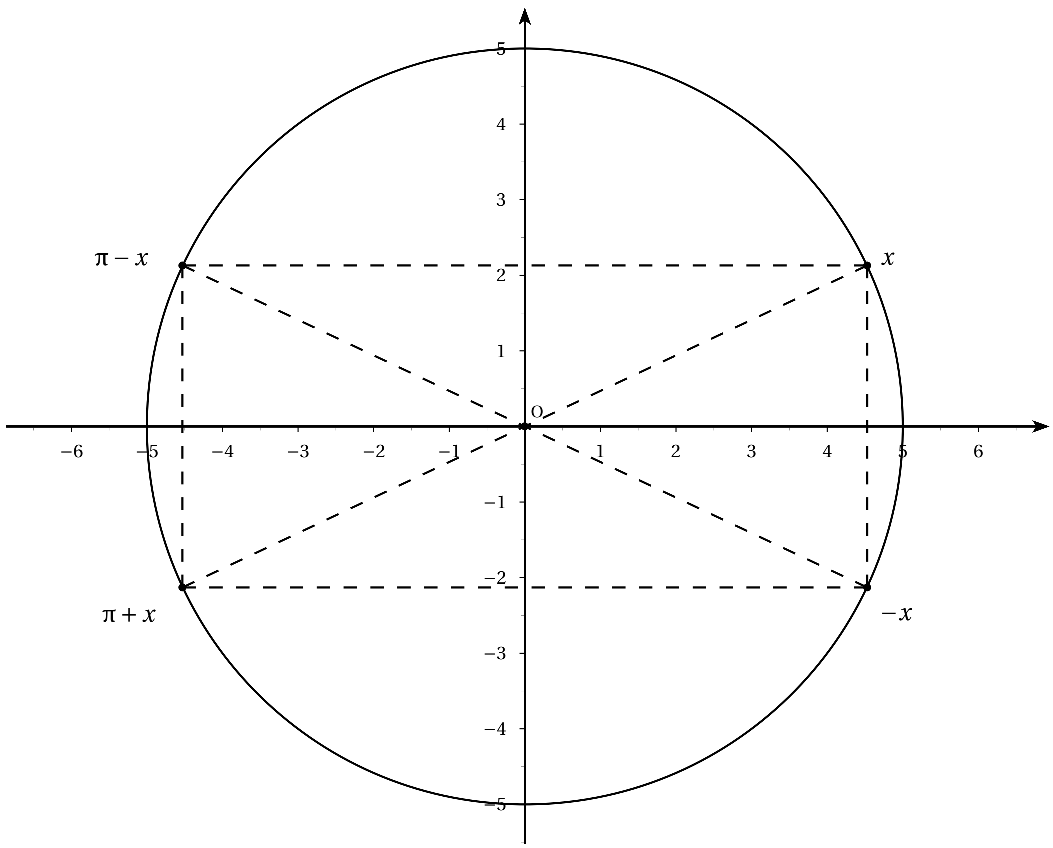
Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (5 points)

1. Compléter le cercle trigonométrique suivant :



2. Exprimer en fonction de $\cos x$ le nombre suivant :

$$A = \cos x - 2\cos(x-\pi) + 4\cos(x+\pi) - 6\cos(x-6\pi) + 8\cos(-x)$$

Sur la figure précédente, des symétries du rectangle on constate que :

$$\cos(x-\pi) = -\cos x \quad ; \quad \cos(x+\pi) = -\cos x \quad ; \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

De plus $\cos(x-6\pi) = \cos(x-3\times 2\pi) = \cos x$, d'où l'on déduit que :

$$A = \cos x + 2\cos x - 4\cos x - 6\cos x + 8\cos x = \cos x$$

puis en fonction de $\sin x$ et $\sin^2 x$ le suivant :

$$B = \cos^2 x - \sin(x-8\pi) + 5\sin(-x)$$

On procède comme précédemment pour trouver que :

$$B = \cos^2 x - \sin x - 5\sin(x) = \cos^2 x - 6\sin x$$

Or, on sait que pour tout réel x on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ d'où :

$$B = 1 - \sin^2 - 6\sin x$$

Exercice 2. (5 points)

1. (a) Déterminer la mesure principale dont une mesure en radian vaut :

$$\alpha = -\frac{75\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{75\pi}{4}$$

$\dfrac{-75}{6} \simeq -12,5$, par conséquent $-13 < -\dfrac{75}{6} < -12 \iff -13\pi < -\dfrac{75\pi}{6} < -12\pi$

Ajoutons 6 tours, soit 12π ce qui donne :

$$-13\pi + 12\pi < -\frac{75\pi}{6} + 12\pi < -12\pi + 12\pi \iff -\pi < \frac{-75\pi + 72\pi}{6} < 0 \iff -\pi < -\frac{\pi}{2} < 0$$

La mesure principale de $\dfrac{-75\pi}{6}$ est donc $-\dfrac{\pi}{2}$

On procède à l'identique pour β et on trouve que sa mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$

(b) En déduire les valeurs de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.

D'après la question précédente :

$$\cos\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

De même :

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\beta = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Il existe deux points du cercle trigonométrique « dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; ils sont associés aux réels de la forme $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où :

$$\mathcal{S} = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \text{avec} k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

Il existe deux points du cercle trigonométrique « dont le sinus vaut $-\dfrac{1}{2}$; ils sont associés aux réels de la forme $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$d'où :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec} k \in \mathbb{Z} ; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec} k \in \mathbb{Z}\right\}$$

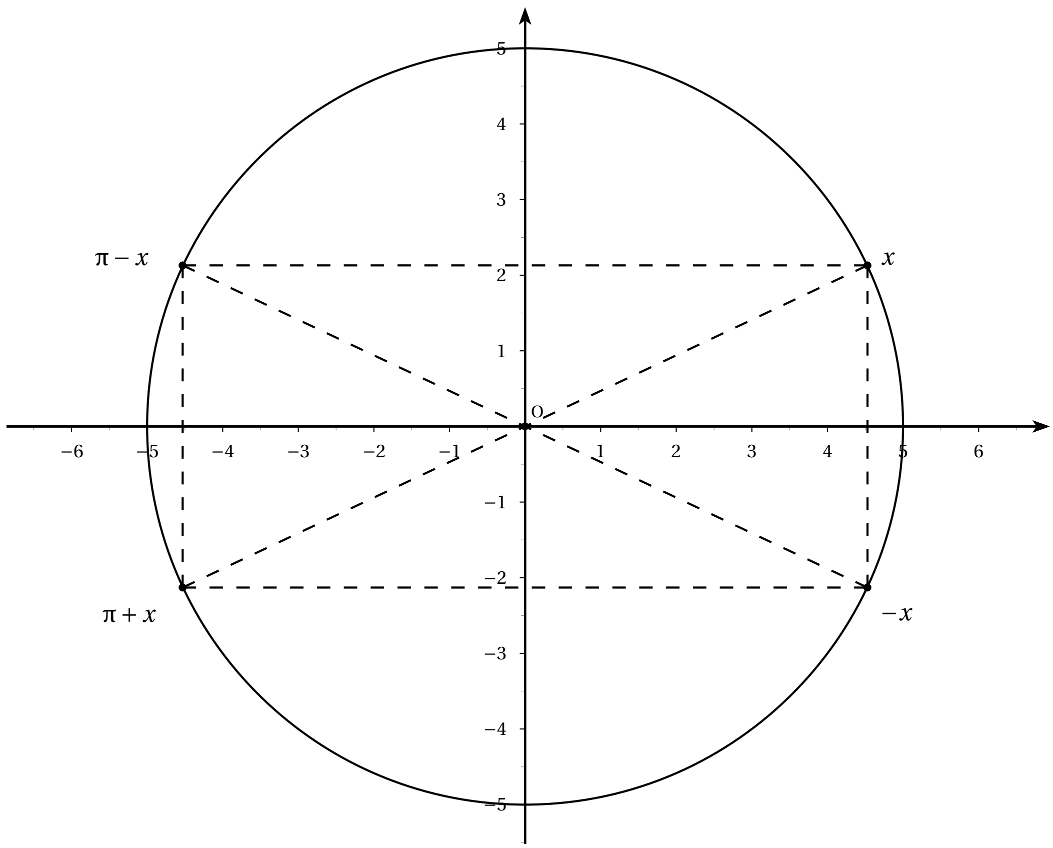
Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (5 points)

1. Compléter le cercle trigonométrique suivant :



2. Exprimer en fonction de $\cos x$ le nombre suivant :

$$A = \cos x - 2\cos(x - 6\pi) + 4\cos(x + \pi) - 6\cos(x - \pi) + 8\cos(-x)$$

Des symétries du rectangle de la question précédente on déduit $\cos(x+\pi) = -\cos x$ puis $\cos(x-\pi) = -\cos x$ et enfin $\cos(-x) = \cos x$.
De plus $\cos(x - 6\pi) = \cos(x - 3\times 2\pi) = \cos x$ ce qui permet de simplifier l'expression de A :

$$A = \cos x - 2\cos x - 4\cos x + 6\cos x + 8\cos x = 9\cos x$$

puis en fonction de $\sin x$ et de $\sin^2 x$ le suivant :

$$B = \cos^2 x - \sin(x - 8\pi) - 5\sin(-x)$$

On procède comme précédemment et on trouve :

$$B = \cos^2 x - \sin x + 5\sin x = \cos^2 x + 4\sin x$$

Or, on sait que pour tout réel x on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ce qui permet de simplifier l'expression de B de la manière suivante :

$$B = 1 - \sin^2 x + 4\sin x$$

Exercice 2. (5 points)

1. (a) Déterminer la mesure principale dont une mesure en radian vaut :

$$\alpha = \frac{75\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{75\pi}{4}$$

$\frac{75}{6} = 12,5$ donc $12 < \frac{75}{6} < 13$ donc $12\pi < \frac{75\pi}{6} < 13\pi$. Enlevons 6 tours c'est-à-dire 12π :

$$12\pi - 12\pi < \frac{75\pi}{6} - 12\pi < 13\pi \Longleftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} < \pi$$

La mesure principale de α est donc $\frac{\pi}{2}$

En procédant de la même manière pour β on déduit que sa mesure principale est $-\frac{3\pi}{4}$

(b) En déduire les valeurs de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.

En utilisant la question précédente et les symétries du cercle trigonométrique on a :

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{et} \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

puis :

$$\cos\beta = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{-3\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Il existe deux points du cercle trigonométrique « dont le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ils sont associés aux réels de la forme $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où :

$$\mathscr{S} = \left\{\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec} k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) $\sin x = \frac{1}{2}$

Il existe deux points du cercle trigonométrique « dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$; ils sont associés aux réels de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$d'où :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec} k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec} k \in \mathbb{Z}\right\}$$