∽ Correction Devoir Surveillé 7 ∽
Loi binomiale

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements.

Exercice 1. **6 points**

Une entreprise possède 50 ordinateurs. Lorsque les employés de cette entreprise partent en week-end, les 50 ordinateurs fonctionnent parfaitement. On suppose que chaque ordinateur a une probabilité égale à $0,01$ de tomber en panne pendant le week-end.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'ordinateur en panne le lundi matin.

On donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près.

1. Donner, sans justification, la loi suivie par la variable aléatoire X en préciser ses paramètres.

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(50;0,01)$$

2. Déterminer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne durant le week-end. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(50;0,01)$ il suit que :

$$P(X=0) = \binom{50}{0} \times 0,01^0 \times 0,99^{50} = 0,99^{50}$$

3. Déterminer la probabilité qu'au moins un ordinateur soit en panne le lundi matin.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,99^{50}$$

4. Déterminer $P(X=1)$ puis $P(X=2)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(50;0,01)$ il suit que :

$$P(X=1) = \binom{50}{1} \times 0,01^1 \times 0,99^{49} = 50 \times 0,01 \times 0,99^{49} = \frac{0,99^{49}}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X=2) = \binom{50}{2} \times 0,01^2 \times 0,99^{48}$$

5. Déterminer la probabilité qu'au plus 2 ordinateurs soient en panne le lundi matin.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

6. Déterminer $E(X)$ puis interpréter.
Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(50;0,01)$ il suit que $E(X) = 50 \times 0,01 = 0,5$
En moyenne $0,5$ ordinateurs sont en pannes le lundi matin.

Exercice 2. **7 points**

Des études statistiques ont montré qu'à la naissance, la probabilité d'avoir une fille est de $0,49$. On rencontre au hasard une famille de trois enfants, dont les naissances sont supposés indépendantes (c'est-à-dire que chaque enfant a 49% de chance d'être une fille), et on s'intéresse au nombre de filles.

1. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de filles dans cette famille.
   (a) Donner, sans justification, la loi suivie par la variable aléatoire X en précisant ses paramètres.

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(3;0.49)$$

   (b) Calculer la probabilité que cette famille ait au moins une fille.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.51^3$$

   (c) Calculer la probabilité que cette famille ait au moins un garçon.
   Cette famille a au moins un garçon si et seulement si elle a au plus deux filles d'où :

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X=3) = 1 - 0,49^3$$

2. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 10 familles de trois enfants (les hypothèses sont les mêmes qu'au début de l'exercice).
On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de familles qui ont au moins une fille.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   Puisqu'on rencontre au hasard et de manière indépendante 10 familles de trois enfants, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de familles qui ont au moins une fille suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 1 - 0.51^3$.
   (b) Calculer la probabilité que neuf familles exactement sur les dix aient au moins une fille.

$$P(Y=9) = \binom{10}{9} \times \left(1 - 0.51^3\right) \times \left(0.51^3\right)^9$$

3. Combien de familles de trois enfants doit-on rencontrer pour être sûr à plus de 99% qu'au moins l'une d'entre elles ait au moins une fille ?

   Notons Z la variable aléatoire qui donne le nombre de familles qui ont au moins une fille, alors $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n; 1-0.51^3)$.

   On cherche n tel que :

$$P(Z \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - P(Z=0) \geq 0,99 \iff 0.01 \geq P(Z=0) \iff \left(0.51^3\right)^n \leq 0,01$$

   De plus $\left(0.51^3\right)^2 > 0,01$ et $\left(0.51^3\right)^3 < 0,01$. Ainsi il faut rencontrer au moins 3 familles pour être sûr à plus de 99% qu'au moins l'une d'entre elles ait au moins une fille.

Exercice 3. **7 points**

Alice et Bob jouent une série de 12 parties de dames. On suppose que la probabilité que Bob gagne une partie est identique pour chacune des 12 parties de la série.

1. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de victoire de Bob. Nous savons que l'espérance de X vaut $E(X) = \frac{48}{5}$.

   (a) La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?

   X suit une loi binomiale puisqu'on répète de manière identique 12 épreuves de Bernoulli (chacune des 12 parties de dames en étant une).

   (b) En déduire la probabilité p que Bob gagne une partie.

   Puisque $X\mathscr{B}(12; p)$ et que $E(X) = \frac{48}{5}$ alors :

$$12p = \frac{48}{5} \iff p = \frac{4}{5}$$

   (c) Calculer $P(X = 10)$. Puisque $X\mathscr{B}(12; 0.8)$ alors

$$P(X=10) = \binom{12}{10} \times 0,8^{10} \times 0,2^2$$

2. Alice et Bob recommence une série de parties de dames pour lesquelles à chaque fois Bob gagne avec une probabilité égale à $\frac{4}{5}$. En revanche, ils décident d'interrompre la série dès qu'Alice remporte une partie.

   On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de parties disputées lors de cette série.

   (a) La variable aléatoire Y suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

   Dès qu'Alice gagne une partie de dames la série de partie est interrompue donc Y ne suit pas une loi binomiale.

   (b) Calculer $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.

   L'événement $Y = 1$ signifie qu'Alice et Bob ont disputé exactement une partie donc que cette partie a été gagné par Alice, par conséquent

$$P(Y=1) = \frac{1}{5}$$

   L'événement $Y = 2$ signifie qu'Alice et Bob ont disputé exactement deux parties donc que la première partie a été gagné par Bob puis la suivante par Alice d'où :

$$P(Y=2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

   (c) La probabilité que Bob gagne plus de parties qu'Alice est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

   Bob gagne plus de parties qu'Alice si et seulement si ils disputent plus de 3 parties. En effet n'oublions pas qu'Alice gagne au maximum une partie lors de cette série (la dernière).

   Nous cherchons donc à savoir si $P(Y \geq 3) \geq \frac{1}{2}$.

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25}$$

   Il y a donc nettement plus d'une chance sur deux que Bob gagne plus de parties qu'Alice.