Correction Devoir Surveillé 4
Trigonométrie ; suite ; fonctions et probabilité

Exercice 1. **Fonctions**

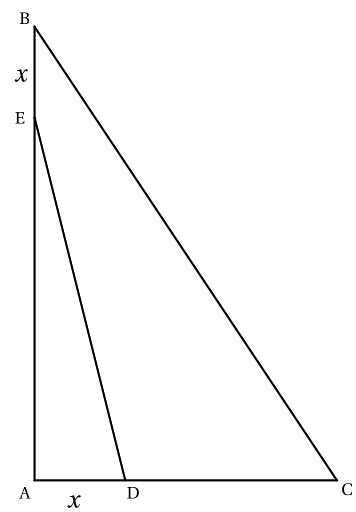
1. Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur [AC] et [AB] tels que AD = BE = x.
   Données : AB = 18 m et AC = 8 m.

   (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $-x^2+18x-72=0$.
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2-4ac = 18^2-4\times(-1)\times(-72) = 36 > 0$$
   L'équation admet donc deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont :
   $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18+6}{-2} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18-6}{-2} = 12$$
   Et voici l'ensemble des solutions de l'équation $-x^2+18x-72=0$:
   $$\mathscr{S} = \{6;12\}$$

   (b) Déterminer l'aire du triangle ABC.
   L'aire du triangle rectangle ABC vaut :
   $$\frac{\text{AB}\times\text{AC}}{2} = \frac{18\times 8}{2} = 9\times 8 = 72m^2$$

   (c) Exprimer l'aire du triangle ADE en fonction de x.
   ADE a pour aire :
   $$\frac{\text{AD}\times\text{AE}}{2} = \frac{x(18-x)}{2}$$

   (d) Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.
   L'aire de ADE vaut la moitié de celle de ABC si et seulement si :
   $$\frac{72}{2} = \frac{x(18-x)}{2} \Longleftrightarrow 72 = x(18-x) \Longleftrightarrow 0 = -x^2+18x-72$$
   On sait d'après la première question que cette équation admet deux solutions 6 et 12.
   Or, 12 est impossible puisque AD ≤ AC = 8 donc le problème admet pour unique solution $x=6$.



2. Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires est 15125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeur que doivent avoir les côtés.
   Trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs dont celui du milieu mesure n cm ont pour aire :
   $$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1 = 3n^2+2$$
   On cherche n entiers tels que
   $$3n^2+2 = 15125 \Longleftrightarrow 3n^2 = 15123 \Longleftrightarrow n^2 = 5041 \Longleftrightarrow n = \pm 71$$
   On peut donc trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires vaut 15125, les côtés de ses trois carrés sont 70, 71 et 72.

Exercice 2. **Probabilité**

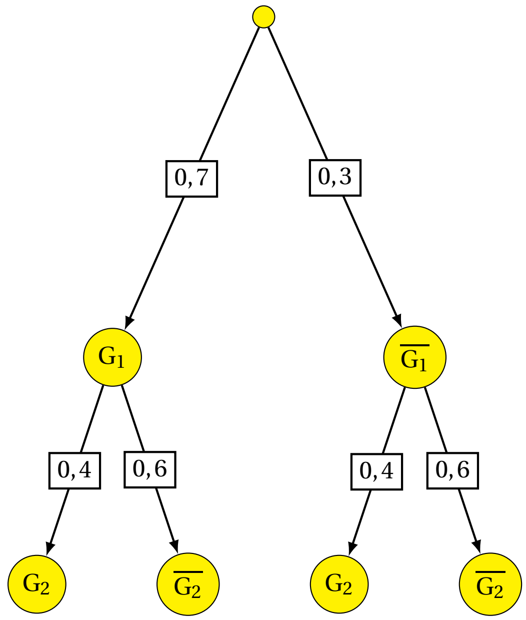
Igor, un champion de roller sous marin, s'inscrit au championnat du monde de la discipline. Il doit effectuer deux figures pour lesquelles il est particulièrement entrainé. Par expérience il sait qu'il a 70% de chance de réussir sa première figure, par contre il n'a que 40% de chance de réussir sa deuxième figure. Le gouvernement Syldave a décidé de récompenser son champion de la manière suivante :

— S'il réussit les deux figures, Igor reçoit la somme de 1000 € Syldave.

— S'il ne réussit qu'une figure, le gouvernement syldave récompense Igor d'un euro syldave.

— Sinon Igor doit au gouvernement syldave la somme de 2000 € Syldave.

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.
   Notons G_i, pour $i=1$ ou $i=2$, l'événement Igor réussit sa $i-$ème figure.



2. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse les deux figures.
   Notons A l'événement « Igor réussit les deux figures ». Dans ce cas :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2) = 0,7 \times 0,4 = \frac{28}{100} = 0,28$$

3. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse exactement une figure.
   Notons B l'événement « Igor réussit exactement une figure ». Dans ce cas :

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{G}_1 \cap \overline{\mathrm{G}_2} + p(\overline{\mathrm{G}_1} \cap \mathrm{G}_2) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,42 + 0,12 = 0,54$$

4. On note G la variable aléatoire donnant les gains d'Igor.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   La probabilité qu'Igor loupe les deux figures est de $0,3 \times 0,6 = 0,18$, d'où :

Gain G	2000	1	-2000	Total
$p(\mathrm{G} = x_i)$	0,28	0,54	0,18	1

   (b) Déterminer l'espérance de G. Igor a-t-il raison de s'inscrire au championnat du monde ?

$$\mathrm{E(G)} = 0,28 \times 2000 + 0,54 \times 1 - 0,18 \times 2000 \simeq -79$$

   En moyenne Igor perd de l'argent, mais l'euro n'ayant peut-être aucune valeur en Syldavie contrairement à la gloire d'être champion du monde, il est difficile de se prononcer…

   (c) Déterminer l'écart-type $\sigma(\mathrm{G})$. Interpréter.

$$\mathrm{V(G)} = \mathrm{E(G^2)} - (-79)^2 = 0,28 \times 2000^2 + 0,54 * 1^2 + 0,18 * 2000^2 - 79^2 \simeq 993687$$

   Et ainsi :

$$\sigma\mathrm{G} = \sqrt{\mathrm{V(G)}} \simeq 997$$

   En moyenne on devrait observer un écart de gain par rapport à la moyenne d'environ 1000 euros, c'est-à-dire qu'un tel athlète risque de gagner entre $-79-997$ et $-79+997$. Le jeu pour quelqu'un qui tient à ne pas perdre son argent et très risqué, pour quelqu'un en revanche qui prêt à tout perdre en espérant gagner beaucoup le jeu est pas si mal…

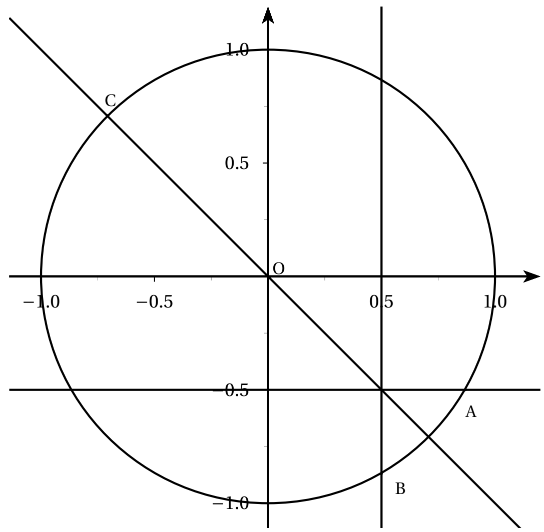
5. Si Igor était Grolandais alors $\mathrm{Y} = 40\mathrm{G} - 100$ est la variable aléatoire qui donne les gains qu'Igor obtiendrait du gouvernement Grolandais. Calculer E(Y) et $\sigma(\mathrm{Y})$. Interpréter.

$$\mathrm{E(Y)} = 40\mathrm{E(G)} - 100 \simeq -40 \times 79 - 100 \simeq -3278$$

   Puis $\sigma(\mathrm{Y}) = 40 \times \sigma(\mathrm{G}) \simeq 39974$. En moyenne le championnat du monde est moins lucratif pour un Grolandais mais le risque de gagner gros et/ou de perdre gros est accentué pour un candidat Grolandais.

Exercice 3. **Trigonométrie**

Trois points A, B et C sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous :



1. Donner la mesure principale associé aux points A, B et C.

$$A\left(\frac{-\pi}{6}\right) \qquad B\left(\frac{-\pi}{3}\right) \qquad C\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points :

$$E\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad ; \quad F\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad G\left(\frac{15\pi}{2}\right)$$

La mesure principale de G est $-\frac{\pi}{2}$. Placer les points est ensuite une banalité.

3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{2}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-0,5$	0
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

4. Déterminer la mesure principale de $\frac{2014\pi}{3}$

$2014/3 \simeq 671$ donc :

$$671 < \frac{2014}{3} < 672 \Longleftrightarrow 671\pi < \frac{2014\pi}{3} < 672\pi$$

On enlève 336 tours c'est-à-dire 672π et on obtient :

$$-\pi < \frac{2014\pi}{3} - 672\pi < 0 \Longleftrightarrow -\pi < -\frac{2\pi}{3}\pi < 0$$

La mesure principale de $\frac{2014\pi}{3}$ est $-\frac{2\pi}{3}$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6. On sait que x est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos x = \frac{5}{6}$. Déterminer $\sin x$. On sait que pour tout réel x on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Longleftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Puisque x est un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ il suit que $\sin x \geq 0$ et donc que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Exercice 4. **Suites**

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent donc se traiter séparément.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{4n+5}$$

1. Calculer u_0 ; u_1 et u_{100}.

$$u_0 = \sqrt{4\times 0+5} = \sqrt{5}$$

$$u_1 = \sqrt{4\times 1+5} = 3$$

$$u_{100} = \sqrt{4\times 100+5} = \sqrt{405}$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{4x+5}$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

f est définie si et seulement si $4x+5 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{5}{4}$ d'où :

$$\mathscr{D}_f = \left[-\frac{4}{5};+\infty\right[$$

(b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

Considérons la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x+5$. Puisque son coefficient directeur est positif $4 > 0$ la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $f = \sqrt{g}$ la fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}_f = \left[-\dfrac{4}{5};+\infty\right[$

(c) Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :

$$f(n+1) > f(n)$$

Puisque n est un entier on a : $0 \leq n < n+1$ donc puisque f est strictement croissante sur $\mathscr{D}_f = \left[-\dfrac{4}{5};+\infty\right[$ il suit que :

$$f(n) < f(n+1)$$

(d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$f(n) = u_n$ et $f(n+1) = u_{n+1}$ donc d'après la question précédente :

$$u_n < u_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement croissante

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} v_0 = 19 \\ v_{n+1} = \sqrt{4v_n+5} \end{cases}$$

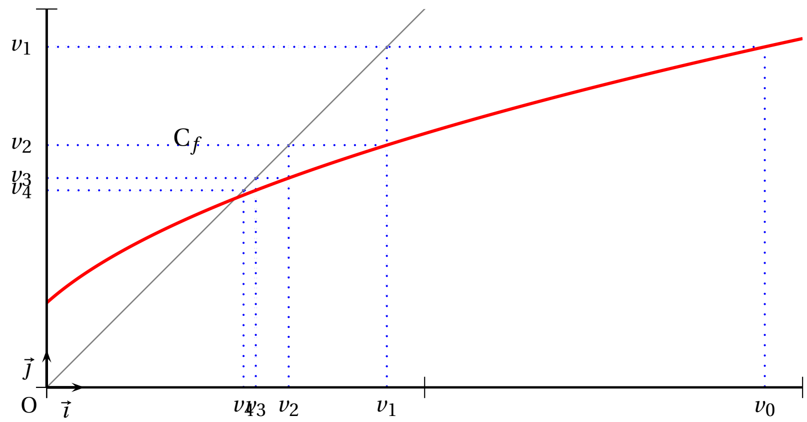
1. Calculer v_1 ; v_2 et v_3. Donner si besoin une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$v_1 = \sqrt{4\times 19+5} = 9$$

$$v_2 = \sqrt{4\times 9+5} \simeq 6,40$$

$$v_3 = \sqrt{4\times\sqrt{41}+5} \simeq 5,53$$

2. Soit $f(x) = \sqrt{4x+5}$. Sur le graphique suivant, nous avons représenté la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$:



Placer sur l'axe des abscisses, **en utilisant** $\mathscr{C}_f$ **et la droite d'équation** $y = x$, les termes v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4. On laissera apparent les traits de construction.

3. Conjecture, à l'aide de la question précédente, le sens de variation de la suite (v_n) et la limite ℓ de la suite (v_n).

   D'après le graphique précédent on observe que $v_0 > v_1 > v_2 > v_3 > v_4$ on pourrait croire que v est décroissante. De plus les termes de la suite v semblent se rapprocher de l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = x$ et la courbe $y = \sqrt{4x+5}$ qui vaut environ 5 donc on conjecture que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 5$$

4. Retrouver par le calcul la valeur de la limite ℓ que vous avez conjecturé à la question précédente.

   ℓ semble vérifier $\ell = \sqrt{4\ell+5} \Longleftrightarrow \ell^2 = 4\ell+5$ et donc $\ell^2 - 4\ell - 5 = 0$

   On calcule le discriminant :

$$\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$$

   . Ce trinôme admet deux racines que voici :

$$x_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \qquad et \qquad x_2 = -1$$

   La suite étant définie par une racine carrée il est inconcevable que $\ell = -1$ donc $\ell = 5$

5. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: v est réel, n un entier et A > 0
$v := 19$ et $n := 0$
Choisir une valeur positive pour A
Tant que ($|v-5| > \mathrm{A}$) **Faire**
    $v := \sqrt{4 \times v + 5}$
    $n := n+1$
Fin Tant que
Afficher n

   (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur choisit A = 1. **On ne demande aucune justification.**

   Il affiche 3

   (b) Que fait cet algorithme ? **On ne demande aucune justification.**

   Il affiche le plus petit entier n tel que l'écart entre v_n et 5 est inférieur ou égal à A.

Exercice 5. **Question Cactus**

Deux prisonniers (complices d'un crime) sont retenus dans des cellules séparées et qui ne peuvent communiquer ; l'autorité pénitentiaire offre à chacun des prisonniers les choix suivants :

- si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que le second obtient la peine maximale (20 ans) ;
- si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (10 ans) ;
- si les deux refusent de dénoncer, la peine sera minimale (1 ans), faute d'éléments au dossier.

En se plaçant du point de vue d'un des deux prisonniers, que faire ? Expliquez votre réponse.

1. **Première Analyse** : Si le prisonnier privilégie l'intérêt du groupe et pense qu'il en va de même de son compère alors les deux arriveront à la conclusion qu'il ne mieux pas se dénoncer. En effet la somme totale des années qu'ils passeront en prison ne peut être inférieure à 2.
2. **Deuxième Analyse** : Le prisonnier peut éventuellement raisonner comme suit :

   Si son complice le dénonce alors il minimisera sa peine en le dénonçant aussi (obtenant ainsi que 10 ans au lieu de 20).

   Si son complice ne le dénonce pas alors il minimisera sa peine en le dénonçant la encore (étant dans ce cas libéré).

   Puisque dans les deux cas il minimise sa peine en dénonçant son complice il pourrait penser que c'est la meilleure stratégie pour lui. Le problème demeure si son complice fait la même analyse que lui...
3. **Conclusion** : La meilleure stratégie semble être la coopération, cependant le jeu est formulé d'une telle manière que chacun des deux complices est très fortement poussé à trahir son complice d'où l'existence d'un dilemme.