∾ Correction du devoir Surveillé 3 ∾
Trigonométrie et suite

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements.

Exercice 1. (5 points)

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
On s'aidera d'un cercle trigonométrique pour résoudre chaque équation ; pour la dernière question on se contentera de placer approximativement $\frac{\pi}{5}$ sur le cercle trigonométrique.

   (a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Sur le cercle trigonométrique deux points sont associés à des réels ayant pour abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ces réels sont ceux de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où :

   $$\mathscr{S} = \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$$

   (b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Sur le cercle trigonométrique deux points sont associés à des réels ayant pour abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ces réels sont ceux de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où :

   $$\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$$

   (c) $\cos x = \cos\frac{\pi}{5}$

   Sur le cercle trigonométrique deux points sont associés à des réels ayant pour abscisse $\cos\frac{\pi}{5}$; ces réels sont ceux de la forme $\frac{\pi}{5} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{5} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où :

   $$\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{5} + 2k\pi; -\frac{\pi}{5} + 2k\pi\}$$

2. Donner les solutions dans $]-\pi;\pi]$ des équations précédentes.
Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ les solutions des équations précédentes sont respectivement :

$$\mathscr{S} = \{\frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\}$$

$$\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$$

$$\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{5}; -\frac{\pi}{5}\}$$

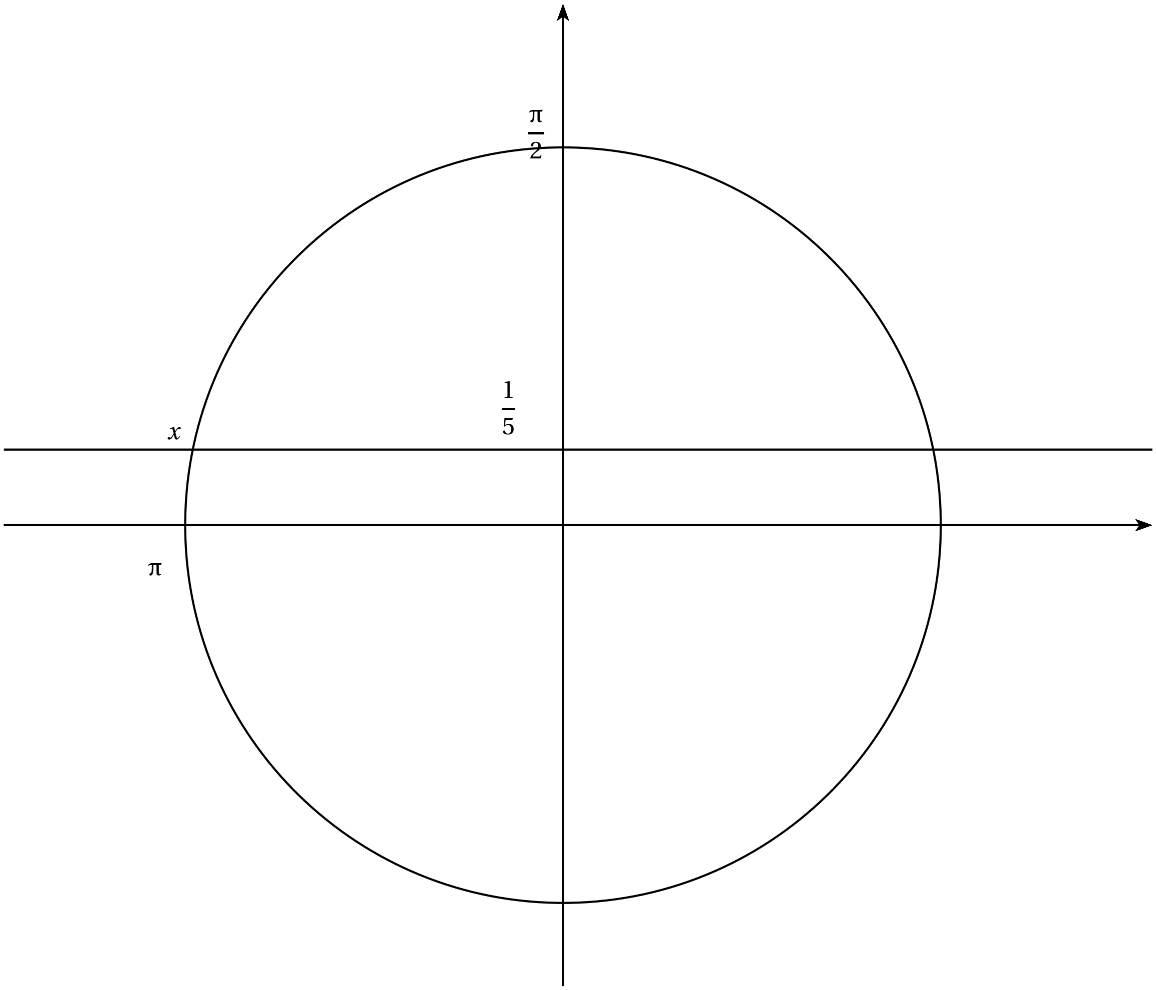
Exercice 2. (3 points)

On suppose dans cette exercice que :

$$\sin x = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

L'unité du repère vaut 5 cm.

1. Placer x sur le cercle trigonométrique.

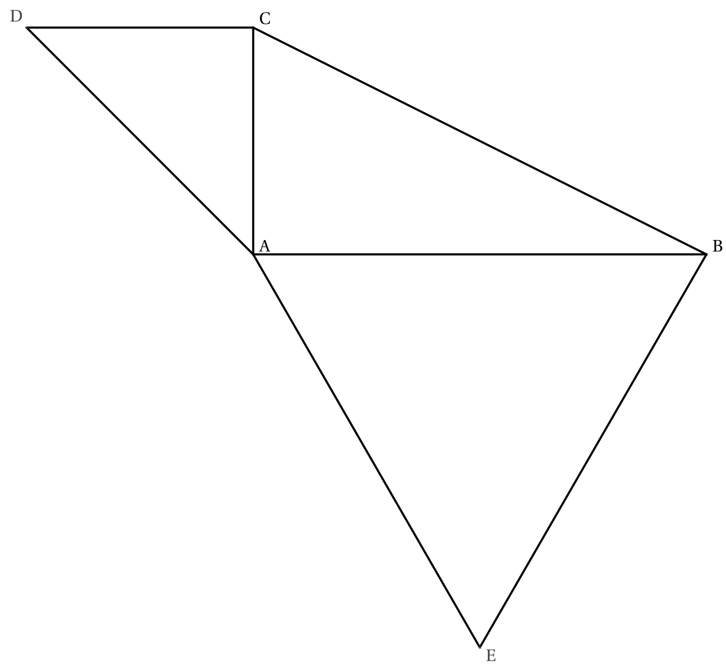


2. Quel est le signe de $\cos x$?
   Puisque $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors $\cos x < 0$
3. Calculer $\cos(x)$ (**en valeur exacte**).
   On sait que pour tout réel x on a :
   $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
   De plus, puisque $\sin x = \frac{1}{5}$ il suit que $\sin^2 x = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ et donc :
   $$\cos^2 x + \frac{1}{25} = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$
   Par conséquent :
   $$\cos x = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$$
   Or, d'après la question précédente on sait que $\cos x < 0$, on en déduit que :
   $$\cos x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

Exercice 3. (5 points)

ABC est un triangle rectangle en A et de sens direct tel que AB = 2AC. ACD est un triangle isocèle et rectangle en C de sens direct et BAE est un triangle équilatéral direct.

1. Réaliser une figure pour AC = 3 cm.



2. (a) Déterminer, en utilisant la relation de Chasles une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

Utilisons donc la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi+6\pi+4\pi}{12}=-\frac{13\pi}{12}$$

En effet dans un triangle équilatéral tous les angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et dans un triangle rectangle isocèle les angles à la base mesurent $\frac{\pi}{4}$.

(b) Les points A, D et E sont-ils alignés ?

Les points A, D et E ne sont pas alignés puisque $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{13\pi}{12}\neq\pi$

3. (a) En utilisant la trigonométrie dans le triangle rectangle ABC, déterminer à 10^{-2} près une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$.

Vous donnerez une mesure en radian ou en degré, au choix (en respectant l'orientation).

Dans le triangle rectangle ABC on sait que $\tan\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

Or, $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 26,57°$.

Concluons alors que :

$$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)\simeq 26,57°$$

(b) En déduire une valeur approchée de l'angle $\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{BC}\right)$

Vous donnerez une mesure en radian ou en degré, au choix (en respectant l'orientation).

L'angle $\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{BC}\right)$ mesure en degré environ :

$$180-26,57-60\simeq 120-26,57\simeq 93,43°$$

Exercice 4. (7 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 et enfin u_6.

$$u_0 = \cos 0 = 1$$
$$u_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$u_3 = \cos\pi = -1$$
$$u_4 = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$u_5 = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$u_6 = \cos 2\pi = 1$$

2. (a) Déterminer la mesure principale de $\frac{100\pi}{3}$.

On a $33 < \frac{100}{3} < 34 \iff 33\pi < \frac{100\pi}{3} < 34\pi \iff 33\pi - 34\pi < \frac{100\pi}{3} - 34\pi < 34\pi - 34\pi$ ce qui donne :

$$-\pi < -\frac{2\pi}{3} < 0$$

On en déduit que la mesure principale de $\frac{100\pi}{3}$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

(b) En déduire u_{100}.

$$u_{100} = \cos\frac{100\pi}{3} = \cos\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

3. (a) On suppose que n est un multiple de 6, donner la mesure principale de $\frac{n\pi}{3}$ puis préciser u_n.

Si n est un multiple de 6 alors il existe un entier k tel que $n = 6k$ auquel cas on a :

$$\frac{n\pi}{3} = \frac{6k\pi}{3} = 2k\pi$$

Or, la mesure principale de $2k\pi$ est obtenu en choisissant $k = 0$ et vaut 0.

Il suit que $u_n = \cos\frac{n\pi}{3} = \cos 0 = 1$.

(b) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par 6 est 1, donner la mesure principale de $\frac{n\pi}{3}$ puis préciser u_n.

Si le reste de la division euclidienne de n par 6 est 1 alors il existe un entier k tel que $n = 6k + 1$ auquel cas on a :

$$\frac{n\pi}{3} = \frac{(6k+1)\pi}{3} = \frac{6k\pi + \pi}{3} = \frac{6k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

Or, la mesure principale de $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ est obtenu en choisissant $k = 0$ et vaut $\frac{\pi}{3}$.

Il suit que $u_n = \cos\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

(c) Que peut-on penser de la limite de la suite (u_n) ?

Cette suite n'admet pas de limite.

Exercice 5. **Question Cactus**

Un escargot est enfermé dans une cage carré de côté 4 cm. Au début l'escargot se trouve au centre de la cage et décide de partir plein est. Toutes les minutes il parcourt, en ligne droite, 1 cm exactement puis il dévie sa trajectoire d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ et parcourt de nouveau 1 cm. Il continue le même processus jusqu'à atteindre l'un des bords de la cage.

L'escargot parviendra-t-il sur l'une des bordures de la cage ? Si oui, atteindra-t-il le bord est, le bord nord, le bord sud ou le bord ouest ?