∽ Correction du Devoir Maison 7 ∾
Loi binomiale

Vous traiterez au moins deux exercices parmi les trois suivants. **A rendre le 25/03/15**

Exercice 1. ♠♠

Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considérer comme fait au hasard et avec remise. Soit X la variable donnant le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ; préciser ses paramètres.

   On répète 10 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \dfrac{3}{100}$ (dans laquelle le succès consiste à prélever une pièce défectueuse et l'échec consiste à ne pas préveler une pièce défectueuse), par conséquent la variable aléatoire X qui donne le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{100}$,

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10; \frac{3}{100}\right)$$

2. Calculer $P(X = 0)$ puis la probabilité qu'au moins une pièce prélevée soit défectueuse.

   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10; \dfrac{3}{100}\right)$ on a :

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times \left(\frac{3}{100}\right)^0 \times \left(\frac{97}{100}\right)^{10} = 0.97^{10} \simeq 0,74$$

   La probabilité qu'au moins une pièce prélevée soit défectueuse vaut :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^{10} \simeq 0,26$$

3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ puis interpréter.

   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10; \dfrac{3}{100}\right)$ on a $E(X) = 10 \times 0,03 = 0,3$ par conséquent on peut espérer, en moyenne, 0,3 pièces défectueuses.
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times 0,03 \times 0,97} = \sqrt{0,3 \times 0,97} \simeq 0,54$
   L'écart-type est élevé, par rapport à la moyenne, donc il ne serait pas étonnant que les résultats ne soient pas homogènes.

4. Combien de pièces doit-on prélever pour être sûr à plus de 99% d'en avoir au moins une défectueuse ?

   Si on note Z la variable aléatoire qui modélise l'expérience pour n pièces prélevées, alors $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n; 0,03)$
   On cherche n tel que $P(Z \geq 1) \geq 0,99 \Longleftrightarrow 1 - P(Z = 0) \geq 0,99$
   c'est-à-dire :

$$P(Z = 0) \leq 0,01 \Longleftrightarrow 0,97^n \leq 0,01$$

   Comme $0,97^{151} > 0,01$ et $0,97^{152} < 0,01$, il faut prélever 152 pièces pour être sûr à plus de 99% d'en trouver au moins une défectueuse.

5. Une entreprise a prélève un échantillon de 1000 pièces et 67 se sont révélées défectueuses. Est-il légitime de remettre en question le fait que 3% de pièces soient défectueuses ?

   A l'aide d'une calculatrice on trouve que $P(20 \leq X \leq 41) \simeq 0,95$, puisque $67 \notin [20; 41]$, il est légitime de remettre en question le fait que 3% de pièces soient défectueuses au risque de se tromper dans 5% des cas.

Exercice 2. ♠♠♠

Un QCM comporte 5 affirmations. Pour chaque affirmation, on doit répondre par vrai (V) si l'affirmation est toujours vraie, faux (F) si elle est toujours fausse ou par (P) si on ne peut pas conclure. Une réponse au QCM est une suite de 5 lettres parmi V, F ou P.

1. (a) Quel est le nombre de réponses possibles pour le QCM ?

   Pour chaque question, il y a trois possibilités, comme il y a au total 5 affirmations, le nombre de réponses possibles pour le QCM est

$$5^3 = 125$$

(b) Le nombre de réponses comprenant exactement 3 V est-il égal à $\binom{5}{3}$? Argumentez et si vous répondez négativement, déterminer le nombre de réponses comprenant exactement 3 V.

Il y a $\binom{5}{3}$ réponses contenant exactement 3 V et 2 P, il y a tout autant contenant 3 V et 2 F, autrement dit le nombre de réponses comprenant exactement 3 V n'est pas égal à $\binom{5}{3}$.

Déterminer le nombre total de réponses comportant exactement 3 V revient à choisir 3 V parmi 5 positions puis 2 choix pour la réponse suivante (P ou F) et encore 2 choix pour la dernière réponse, il y a donc au total :

$$\binom{5}{3} \times 2 \times 2 = 40 \quad \text{réponses comportant exactement 3 V}$$

2. On décide d'attribuer 2 points pour chaque réponse exacte. Combien de points doit-on retirer par réponse inexacte pour que le candidat qui répond au hasard ait une espérance mathématique nulle ?

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exacte du candidat, X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

Ainsi, un candidat, en répondant au hasard, peut espérer répondre à $E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

Ainsi, ce candidat, marquera en moyenne $\frac{5}{3} \times 2 = \frac{10}{3}$ de points.

S'il répond correctement (en moyenne) à $\frac{5}{3}$ de questions, il réponds faux à $5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

En notant x le nombre de points à enlever au réponse inexacte, x doit vérifier :

$$\frac{10}{3} - \frac{10}{3}x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Par conséquent il faut enlever 1 point par réponse inexacte pour que le candidat qui répond au hasard ait une espérance mathématique nulle.

3. Un candidat répond au hasard et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses.
Indiquer la loi suivie par X, préciser ses paramètres puis calculer E(X).

On répète 5 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{1}{3}$ (dans laquelle le succès consiste à répondre correctement à une question et l'échec consiste à proposer une réponse inexacte), par conséquent la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$, par conséquent :

$$E(X) = \frac{5}{3}$$

Exercice 3. ♠♠♠

Une cible est composée d'un carré de côté 20 cm et d'un disque de rayon 10 cm de même centre. On suppose que la cible est toujours atteinte. La probabilité d'atteindre un secteur de la cible est proportionnelle à l'aire de ce secteur.

1. Montrer que la probabilité p d'atteindre le disque avec une fléchette vaut $p = \frac{\pi}{4}$.

La cible a pour aire $20 \times 20 = 400\ \text{cm}^2$ et le disque a pour aire $\pi \times 10^2 = 100\pi$ donc la probabilité d'atteindre :

$$p = \frac{100\pi}{400} = \frac{\pi}{4}$$

2. On lance 3 fléchettes sur la cible. Les lancers sont supposées indépendants. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le disque est atteint.

(a) Quelle est la probabilité d'atteindre exactement 2 fois le disque ?

On répète 3 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{\pi}{4}$, par conséquent la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où le disque est atteint suit une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{\pi}{4}$, par conséquent :

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\pi^2}{16} \times \left(\frac{4-\pi}{4}\right) = \frac{3\pi^2(4-\pi)}{64}$$

(b) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins 1 fois le disque ?

Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ il suit que :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^0 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 1 - \frac{(4-\pi)^3}{64}$$

(c) Quelle est l'espérance mathématique de X ?

Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ il suit que $E(X) = \frac{3\pi}{4}$

3. On lance une fléchette ; puis on s'arrête si on atteint le **disque** et on continue sinon.

On appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de fléchettes qu'on a lancé.

(a) Y suit-elle une loi binomiale ?

Y ne suit pas une loi binomiale puisqu'on cesse la répétition en cas de succès.

(b) Quelle est la probabilité de lancer exactement deux fléchettes ?

On cherche la probabilité d'avoir échoué au premier lancer et réussit au second lancer :

$$P(Y=2) = \frac{4-\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}$$

(c) Quelle est la probabilité de lancer au plus deux fléchettes ?

$$P(Y \leq 2) = P(Y=1) + P(Y=2) = \frac{\pi}{4} + \frac{4-\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}$$