∾ Correction du devoir maison 6 ∾
Dérivation

Vous traiterez au moins deux exercices parmi les trois suivants. **A rendre le 16/02/15**

Exercice 1. ♠♠♠

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x}$

1. A l'aide de la définition, déterminer le nombre dérivé de f en 1.

   Calculons alors pour $h \neq 0$ le nombre $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{(1+h)^2+1+h+2}{1+h} - \dfrac{1+1+2}{1}}{h} = \frac{\dfrac{1+2h+h^2+1+h+2}{1+h} - 4}{h} = \frac{\dfrac{h^2+3h+4}{1+h} - \dfrac{4(1+h)}{1+h}}{h}$$

   ce qui donne :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2+3h+4-4-4h}{h(1+h)} = \frac{h^2-h}{h(1+h)} = \frac{h(h-1)}{h(1+h)} = \frac{h-1}{1+h}$$

   Enfin :

$$\lim_{h\to 0} \frac{h-1}{1+h} = \frac{0-1}{1+0} = -1$$

   Ainsi on vient de démontrer que $f'(1) = -1$.

2. Déterminer, avec les formules du cours, la fonction dérivée de la fonction f et vérifier le résultat obtenu à la question 1.

   La fonction f est un quotient, de la forme $\dfrac{u}{v}$ par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a, pour tout réel $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2)'x - (x^2+x+2)(x)'}{x^2} = \frac{(2x+1)x - (x^2+x+2)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2+x-x^2-x-2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

   En particulier pour $x = 1$ on retrouve :

$$f'(1) = \frac{1-2}{1} = -1$$

3. Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

   Au point d'abscisse 1 l'équation de la tangente à la courbe représentative de f est de la forme :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

   où $f'(1) = -1$ d'après les questions précédentes et $f(1) = \dfrac{1+1+2}{1} = 4$ et donc une équation de cette fameuse tangente est :

$$y = -(x-1)+4 = -x+1+4 = -x+5$$

4. Existe-t-il des tangentes à la courbes parallèles à la droite d'équation $y = -7x-5$?
   Si oui préciser les points de la courbe qui correspondent à ces tangentes.

   Si une tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -7x-5$ alors son coefficient directeur vaut -7. Le coefficient directeur de la tangente étant $f'(x)$, on cherche les valeurs de x telles que :

$$f'(x) = -7 \iff \frac{x^2-2}{x^2} = -7 \iff x^2-2 = -7x^2 \iff 8x^2 = 2 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

   Il existe deux tangentes à la courbe parallèles à la droite d'équation $y = -7x-5$. Elles passent respectivement par les points d'abscisses $0,5$ et $-0,5$. Déterminons l'ordonnée de ces points :

$$f(0,5) = \frac{0,5^2+0,5+2}{0,5} = \frac{2,75}{0,5} = 5,5 \qquad \text{et} \qquad f(-0,5) = \frac{(-0,5)^2-0,5+2}{-0,5} = \frac{0.25-0.5+2}{-0,5} = \frac{2,25}{-0,5} = -4,5$$

   Les points de la courbe qui correspondent à ces tangentes ont pour coordonnées $(0,5;5,5)$ et $(-0,5;-4,5)$.

Exercice 2. ♠♠

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ L'étude d'une fonction comprend les étapes suivantes :

— *Ensemble de définition* :
La fonction f est définie pour x vérifiant $x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$ d'où :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

— *Ensemble de dérivabilité* :
f est dérivable sur son ensemble de définition (pour une justification plus précise, il faudra attendre d'être en terminale) ainsi f' est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

— *Calcul de la dérivée* :
Pour $x \neq -2$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x+2) - x^2(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

— *Etude du signe de la dérivée* :
$(x+2)^2 > 0$ lorsque $x \neq 2$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x^2 + 4x$.
Nous déterminons les racines de $x^2 + 4x$ i.e. les solutions de l'équation $x^2 + 4x = 0 \iff x(x+4) = 0$ qui sont donc 0 et -4 (pas besoin de calculer le discriminant ici, mais on peut le faire).
Nous obtenons alors :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

— *Tableau de variation* :
Du tableau précédent on déduit immédiatement :

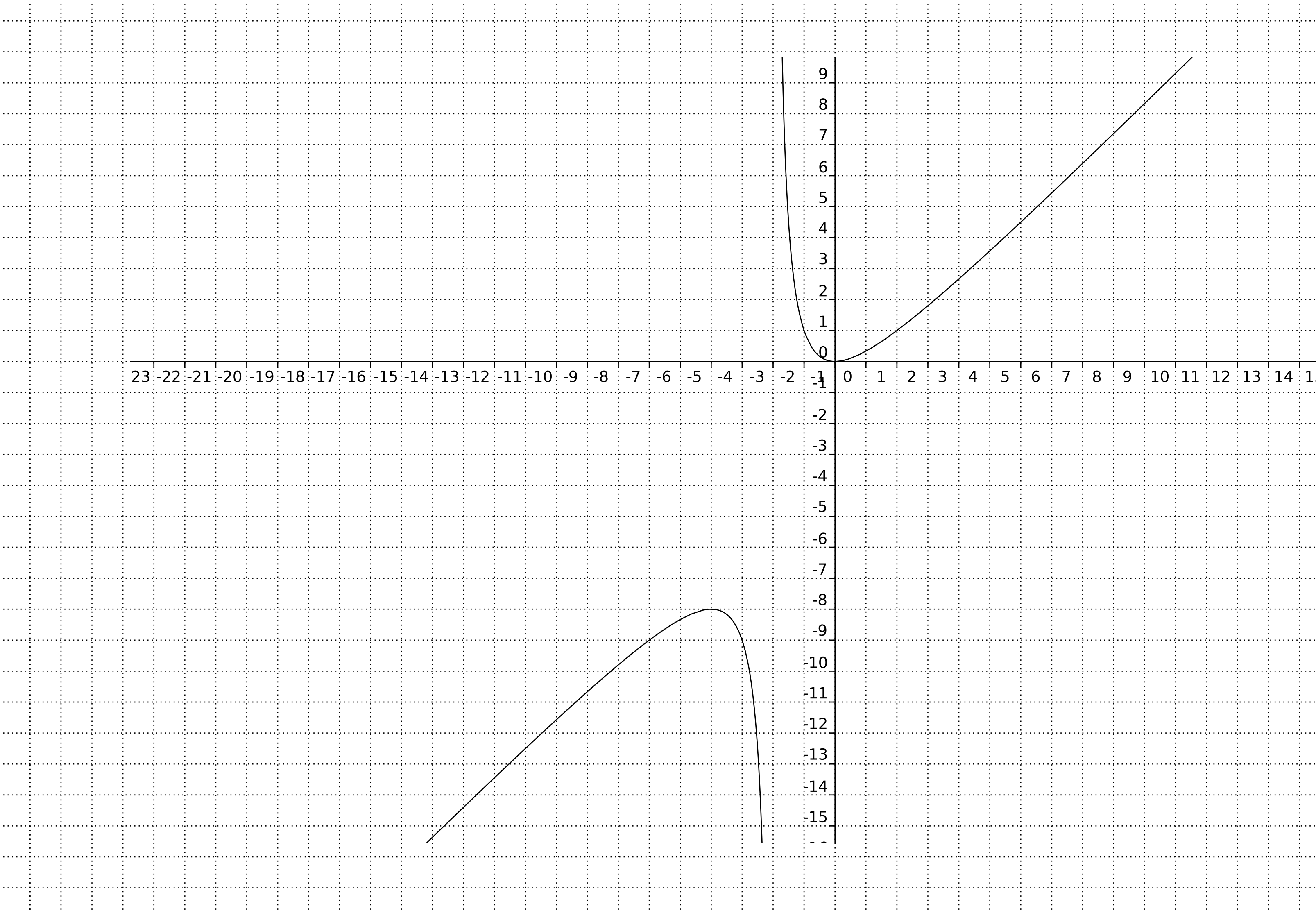
x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-8	↘	‖	↘	0	↗	

— *Recherche des points d'intersection avec les axes du repère* :
Les points d'intersection avec l'axe des ordonnée ont pour abscisse 0 donc on calcule $f(0)$:
$f(0) = \dfrac{0^2}{0+2} = 0$.
Il existe un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, il a pour coordonnée $(0;0)$.
Les points d'intersection avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0 donc on résout $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x^2}{x+2} = 0 \iff x^2 = 0 \times (x+2) \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

Il existe un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées, il a pour coordonnée $(0;0)$.

— *Représentation graphique* :


23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15

Exercice 3. ♠♠♠♠

PARTIE A. **Avec un pavé**

Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

But : *L'industriel cherche à construire une boîte fermée de volume* $1\ dm^3$ *et de surface minimale.*

1. Démontrer que $y = \dfrac{1}{x^2}$ puis en déduire que la surface totale de la boite vaut $S(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.

Le volume du parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$ vaut :

$$y \times x \times x = yx^2$$

Puisqu'il vaut aussi 1 on a $yx^2 = 1 \iff y = \dfrac{1}{x^2}$

La surface totale est constitué de deux carrés de côté x et de 4 rectangles de côté y et x donc :

$$S(x) = 2 \times x^2 + 4 \times yx = 2x^2 + 4yx$$

Puisque $y = \dfrac{1}{x^2}$ on obtient :

$$S(x) = 2x^2 + 4 \times \frac{1}{x^2} \times x = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

2. Démontrer que :

$$\forall x > 0, \qquad S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

Pour $x > 0$ on a :

$$S'(x) = 2 \times 2x + 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 4x + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4x \times x^2 - 4}{x^2} = \frac{4x^3 - 4}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2}$$

Or, $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$ donc :

$$S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

En déduire le tableau de signe de S' puis le tableau de variation de S.

Pour tout $x > 0$ on a $x^2 > 0$ et donc $S'(x)$ a le même signe que $4(x-1)(x^2+x+1)$

Déterminons le signe du trinôme $x^2 + x + 1$:

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1$ est de signe constant et puisque $a = 1 > 0$ on a pour tout réel x $x^2 + x + 1 > 0$ d'où :

x	0		1		$+\infty$
$4(x-1)$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1			$+$		
$4(x-1)(x^2+x+1)$		$-$	0	$+$	
$S'(x)$		$-$	0	$+$	

3. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour que la surface soit minimale ?

Du tableau de signe de S' on déduit immédiatement les variations de S :

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	

De ce même tableau on tire que la surface est minimale lorsque $x = 1$. Dans ce cas $y = \dfrac{1}{1^2} = 1$. Autrement dit pour que la surface de la boîte soit minimale il faut que la boîte soit un cube de côté 1.

PARTIE B. **Avec un cylindre**

Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un cylindre de hauteur y et dont le rayon de la base vaut $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

L'industriel cherche de nouveau à minimiser la surface. En vous inspirant le partie A, déterminer quelles doivent être les dimensions du cylindre pour que la surface soit minimale.

On procède de la même manière que précédemment.
Le volume du cylindre vaut :

$$\pi x^2 \times y$$

Mais il vaut aussi 1 d'où :

$$\pi x^2 y = 1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\pi x^2}$$

La surface du cylindre est constitué de deux cercles de rayons x et d'un rectangle de dimension y et $2\pi x$ d'où, si on note $S(x)$ la surface du cylindre :

$$S(x) = 2 \times \pi x^2 + y \times 2\pi x = 2\pi x^2 + 2\pi x y$$

Or, $y = \dfrac{1}{\pi x^2}$ donc :

$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \times \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$$

Afin d'étudier les variations de la fonction S on calcule S$'$:

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2}{x^2}$$

Puisque pour $x > 0$ on a $x^2 > 0$, il suit que $S'(x)$ est du signe de $4\pi x^3 - 2$.
Or, $4\pi x^3 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = \dfrac{1}{2\pi} \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.
De plus si $x > \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ alors $x^3 > \dfrac{1}{2\pi} \Longleftrightarrow 2\pi x^3 > 1 \Longleftrightarrow 4\pi x^3 > 2 \Longleftrightarrow 4\pi x^3 - 2 > 0 \Longleftrightarrow S'(x) > 0$
Nous pouvons désormais établir le tableau de signe de S$'$ et en déduire le tableau de variation de S.

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$		$+\infty$
$4\pi x^3 - 2$		$-$	0	$+$	
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$S(1)$	$\nearrow$	

De ce tableau on tire que la surface est minimale lorsque $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Dans ce cas la hauteur vaut

$$y = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2}$$

Le cylindre minimisant la surface a pour rayon $x \simeq 1,16$ et pour hauteur $y \simeq 0.24$