CORRECTION DEVOIR MAISON 5
GÉOMÉTRIE PLANE VECTORIELLE

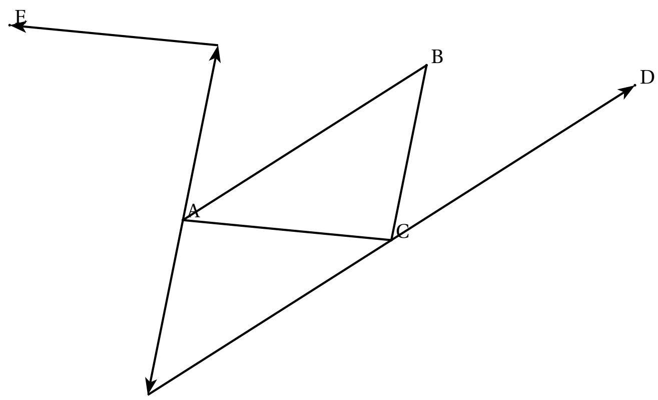
Vous traiterez l'un des exercices suivants. **A rendre le 17/01/15**

Exercice 1. ⋆

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points D et E vérifiant :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$



2. Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?

   On utilise la relation de Chasles et les données de l'énoncé de la manière suivante :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

   De l'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ on déduit que le quadrilatère BDCA est un parallélogramme.

3. Démontrer que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$. Déduire des deux précédentes égalités que E, B et D sont alignés.

   On utilise la relation de Chasles et les données de l'énoncé de la manière suivante :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$$

4. Soit I le milieu de [AB]. Justifier que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Que peut-on en déduire pour (AE) et (CI) ?

   On utilise la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ puisque I est le milieu de [AB] et on obtient quasi-immédiatement :

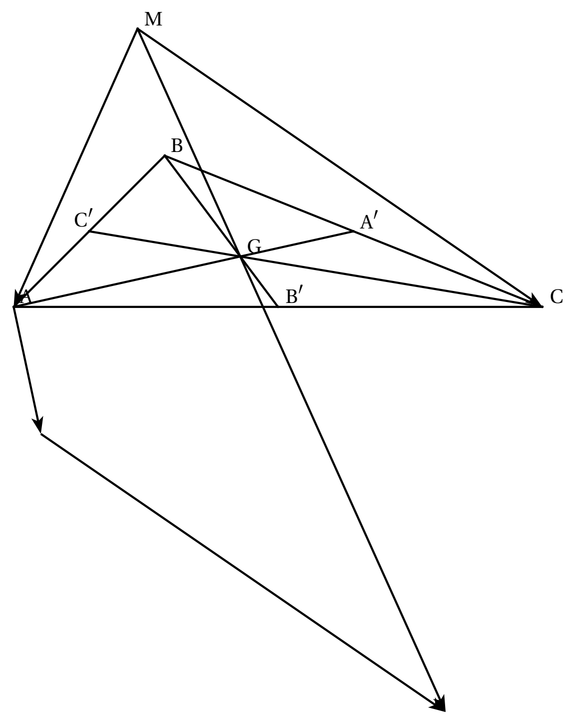
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI}$$

Exercice 2. ⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle quelconque. On note A′ le milieu de [BC], B′ le milieu de [AC] et C′ le milieu de [AB].
Soit G le point du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

1. Réaliser une figure que vous compléterez au fur et à mesure.



2. Justifier que le couple $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ constitue une base de l'espace des vecteurs.

   ABC étant un triangle, cela suggère que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent le couple $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ constitue une base de l'espace des vecteurs.

3. Démontrer que le point G vérifie :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

   Par définition $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ donc :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\iff 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\iff\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

4. Démontrer que :

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

   On utilise la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}$$

   Or, $\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, par conséquent :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

5. En déduire que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

On a démontré que $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ainsi :

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$$

Que peut-on dire des points A, A$'$ et G ?

On vient de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, on en déduit donc que les points A, A$'$ et G sont alignés.

6. Par un raisonnement analogue, que l'on ne demande pas de refaire, donner deux autres relations vectorielles impliquant G et B$'$ (puis G et C$'$).

Par des raisonnements analogues on peut démontrer que :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Que peut-on en déduire sur G ?

G se situe sur chacune des 3 médianes du triangle ABC.

Que représente le point G pour le triangle ABC ?

G représente le centre de gravité du triangle ABC, on peut ajouter que le centre d'un triangle se situe au deux tiers de chaque médiane (partant d'un sommet du triangle).

7. Soit M un point quelconque du plan, démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

Pour tout point M on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{0} = 3\overrightarrow{MG}$$