∽ Correction Devoir Maison 3 ∾
Trigonométrie

Vous traiterez l'exercice suivant. **A rendre le 12/11/14**

Exercice 1. ⋆⋆

PARTIE A. **Echauffement**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes :

1. $\sin x = -1$
   Un unique point du cercle est associé à des réels dont le sinus vaut -1 ; ces réels sont de la forme $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; ce qui nous permet de conclure que :
   $$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$
2. $\sin x = 2$
   Nous savons que pour tout réel x $-1 \leq \sin x \leq 1$, par conséquent il n'existe aucun nombre réel tel que $\sin x = 2$.
   $$\mathscr{S} = \emptyset$$
3. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
   Deux points du cercle trigonométrique sont associés à des réels dont le sinus vaut $-\dfrac{1}{2}$, les premiers sont tous de la forme $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et les autres sont de la forme $\dfrac{-5\pi}{6}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ce qui donne :
   $$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z};\frac{-5\pi}{6}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

PARTIE B. **Polynôme et trigonométrie**

Le but de cette partie est de résoudre l'équation (E) suivante :

$$2\sin^3 x+\cos^2 x-5\sin x-3=0$$

Pour cela on considère le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}-2$$

1. (a) Vérifier que $\mathrm{P}(-1)=0$.
   $$\mathrm{P}(-1) = 2\times(-1)^3-(-1)^2-5\times(-1)-2 = -2-1+5-2 = 0$$
   (b) Déterminer trois nombres réels a, b et c vérifiant :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)(a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c)$$
   Supposons qu'il existe trois réels a, b et c qui vérifient $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)(a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c)$, dans ce cas :
   $$\mathrm{P}(x) = a\mathrm{X}^3+b\mathrm{X}^2+c\mathrm{X}+a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c = a\mathrm{X}^3+(b+a)\mathrm{X}^2+(c+b)\mathrm{X}+c$$
   Or, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}-2$, donc en choisissant $a=2$, $b+a=-1 \Longleftrightarrow b=-1-a=-3$, $c+b=-5 \Longleftrightarrow c = -5+3=-2$ on obtient l'égalité désiré.
   On vient de démontrer que :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}-2 = (\mathrm{X}+1)(2\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}-2)$$
   (c) En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{P}(\mathrm{X})=0$.
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X})=0 \Longleftrightarrow (\mathrm{X}+1)(2\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}-2)=0$$

Or, un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul d'où :

$$P(X) = 0 \Longleftrightarrow X+1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2X^2-3X-2 = 0 \Longleftrightarrow X = -1 \qquad \text{ou} \qquad 2X^2-X-2 = 0$$

Pour résoudre $2X^2-3X-2=0$ calculons le discriminant $\Delta = b^2-4ac = 9-4\times2\times(-2) = 25$ donc l'équation $2X^2-3X-2=0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{25}}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Au final le polynôme P admet 3 racines qui sont -1 ; $-\frac{1}{2}$ et 2.

2. (a) Montrer que résoudre l'équation $2\sin^3 x+\cos^2 x-5\sin x-3=0$ revient à résoudre l'équation :

$$2\sin^3 x-\sin^2 x-5\sin x-2=0$$

On sait que pour tout réel x on a $\cos^2 x+\sin^2 x = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = 1-\sin^2 x$ d'où :

$$2\sin^3 x+\cos^2 x-5\sin x-3=0 \Longleftrightarrow 2\sin^3 x+1-\sin^2 x-5\sin x-3=0 \Longleftrightarrow 2\sin^3 x-\sin^2 x-5\sin x-2=0$$

(b) En posant $X = \sin x$ et en utilisant les résultats des questions précédentes donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On cherche à résoudre $2\sin^3 x-\sin^2 x-5\sin x-2=0$ puisqu'elle a les mêmes solutions que l'équation (E) d'après la question précédente, puis en posant $X=\sin x$ cette équation devient :

$$2X^3-X^2-5X-2=0 \Longleftrightarrow P(X)=0 \Longleftrightarrow X \in \left\{-1;-\frac{1}{2};2\right\}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) vérifient $\sin x = -1$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$ ou $\sin x = 2$. On utilise alors les résultats de la première question pour déduire l'ensemble des solutions de (E) que voici :

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z};-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z};\frac{-5\pi}{6}+2k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$