ൿ Correction Devoir Maison 1 ൿ
Second degré

Vous traiterez au moins un exercice parmi les 4 suivants. **A rendre le 22/09/14**

Exercice 1. ⋆

On considère les polynômes P, Q et R définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - x - 1 \quad ; \quad \mathrm{Q}(x) = -4x^2 - 4x - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(x) = -3x^2 + x - 1$$

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

(a) $\mathrm{P}(x) = 0$.
On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

Puisque le discriminant est strictement positif l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des réels x qui vérifient $\mathrm{P}(x) = 0$ est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

(b) $\mathrm{Q}(x) = 0$
On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 16 - 16 = 0$$

Puisque le discriminant est nul l'équation $\mathrm{Q}(x) = 0$ admet une unique solution qui est :

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des réels x qui vérifient $\mathrm{P}(x) = 0$ est :

$$\mathscr{S} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

(c) $\mathrm{R}(x) = 0$
On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 1 - 12 = -11 < 0$$

Puisque le discriminant est strictement négatif l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ n'admet pas de solutions et par conséquent :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

2. Dresser, en fonction de x, les trois tableaux de signe des expressions $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ et $\mathrm{R}(x)$.
Le trinôme $\mathrm{P}(x)$ admet deux racines, de plus $a = 1 > 0$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		+	0	−	0	+	

Le trinôme $Q(x)$ admet une unique solution avec $a = -4 < 0$ d'où :

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$-4x^2-4x-1$		$-$	0	$-$	

Le trinôme $R(x)$ n'admet pas de racine par conséquent il est de signe constant et puisque $a = -3$ on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2+x-1$		$-$	

3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

   Par lecture des tableaux de signe précédent on déduit :

   (a) $P(x) > 0$ pour $x \in \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

   (b) $Q(x) \geq 0$ pour $x = -\frac{1}{2}$

   (c) $R(x) \leq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer les coordonnées des sommets S_p, S_q et S_r des paraboles représentant P, Q et R.

   L'abscisse du sommet est $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ce qui donne :

   L'abscisse de S_p vaut $\alpha = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

   L'abscisse de S_q vaut $\alpha = -\frac{-4}{-8} = -\frac{1}{2}$

   Et l'abscisse de S_r vaut $\alpha = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$.

   On obtient les ordonnées en calculant les images des abscisses ce qui donne
   $P(0,5) = 0,5^2 - 0,5 - 1 = 0,25 - 0,5 - 1 = -1,25$ puis $Q(-0,5) = -4(-0,5)^2 - 4(-0,5) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$ et enfin
   $R(1/6) = -3 \times (1/6)^2 + (1/6) - 1 = -3/36 + 6/36 - 36/36 = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$.

   Les coordonnées des sommets S_p, S_q et S_r sont donc :

$$S_p\,(0,5;-1,25) \qquad ; \qquad S_q\,(-0,5;0) \qquad \text{et} \qquad S_r\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{12}\right)$$

5. Dresser les trois tableaux de variations des fonctions P, R et Q sur $\mathbb{R}$.

   Des coordonnées du sommet et de la forme de la parabole (qui est donné par signe de a) on déduit immédiatement le tableau de variation des fonctions P, Q et R :

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
x^2-x-1		$\searrow$	$-1,25$	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$-4x^2-4x-1$	$\nearrow$	0	$\searrow$

x	$-\infty$	$1/6$	$+\infty$
$-3x^2+x-1$	$\nearrow$	$-1/12$	$\searrow$

6. Donner, lorsque c'est possible, l'écriture factorisée des polynômes P, Q et R.

   Le polynôme P admet deux racines et par conséquent son écriture factorisée est :

$$\mathrm{P}(x) = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

   Le polynôme Q admet une unique racine $-0,5$, par conséquent son écriture factorisée est :

$$\mathrm{Q}(x) = -4\left(x-(-0,5)\right)^2 = 4(x+0,5)^2$$

   Enfin le polynôme R n'admettant pas de racines ne peut pas être écrit sous forme factorisée.

Exercice 2. ★★

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u^2-5u-6=0$

   Le discriminant vaut $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times 1\times(-6) = 25+24 = 49 > 0$

   Par conséquent l'équation $u^2-5u-6=0$ admet deux solutions que voici :

$$u_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{49}}{2} = \frac{5-7}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{2} = 6$$

   On en déduit l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = \{-1;6\}$$

   (b) En déduire les solutions de l'équation $\sqrt{15-x} = x-3$

   Ensemble de définition de l'équation : Nécessairement on a $15-x \geq 0 \Longleftrightarrow -x \geq -15 \Longleftrightarrow x \leq 15$.

   Par conséquent les solutions éventuelles de l'équation ne peuvent être que des nombres inférieurs ou égaux à 15.

   Résolution de l'équation : Pour $x \leq 15$ on a :

$$\sqrt{15-x} = x-3 \Longrightarrow \left(\sqrt{15-x}\right)^2 = (x-3)^2 \Longleftrightarrow 15-x = x^2-6x+9 \Longleftrightarrow 0 = x^2-5x-6$$

   On retombe sur l'équation que l'on a déjà résolu dans la question précédente dont les solutions sont -1 et 6.

   -1 et 6 sont bien inférieurs à 15 donc sont possiblement solution de $\sqrt{15-x} = x-3$. Mais nous devons vérifier que c'est bien le cas :

   — pour $x=-1$ on a $\sqrt{15-(-1)} = 4$ et $-1-3=-4$, c'est-à-dire que -1 est solution de $0 = x^2-5x-6$ mais de de $\sqrt{15-x} = x-3$...

— pour $x = 6$ on a $\sqrt{15-6} = 3$ et $6-3 = 9$, c'est-à-dire que 6 est solution de $\sqrt{15-x} = x-3$
d'où :

$$\mathscr{S} = \{6\}$$

Pour mieux comprendre : On a $\sqrt{15-x} = x-3 \Longrightarrow \left(\sqrt{15-x}\right)^2 = (x-3)^2$ mais par contraire la réciproque est fausse, il n'est pas vraie que $\left(\sqrt{15-x}\right)^2 = (x-3)^2 \Longrightarrow \sqrt{15-x} = x-3$. En effet si on remplace x par -1 il n'est pas vrai que $\sqrt{15-(-1)} = -1-3$ mais cela devient vrai lorsqu'on élève les résultats au carré. Lorsqu'on perd l'équivalence en cours de résolution, on trouve tous les nombres qui **peuvent être** solutions mais certain d'entre eux ne le sont peut être pas...A méditer.

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u^2 - 7u + 6 = 0$
Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25 > 0$

Par conséquent l'équation $u^2 - 7u + 6 = 0$ admet deux solutions que voici :

$$u_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$$

On en déduit l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = \{1;6\}$$

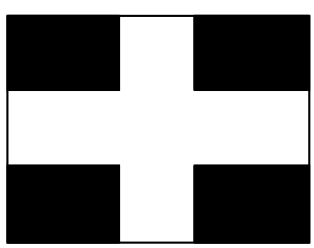
(b) Un drapeau a pour dimensions 3 et 4 (en mètres) et la « croix blanche » est de largeur constante. Quelle est cette largeur sachant que l'aire de la croix est égale à l'aire noire ?
L'aire totale du drapeau vaut $3 \times 4 = 12$ m^2 et l'aire de la croix blanche vaut la moitié de celle du drapeau c'est-à-dire elle vaut $\frac{12}{2} = 6$ m^2.
D'autre part, recalculons l'aire de la croix blanche d'une manière différente, en notant x la largeur de la croix. L'aire des rectangles formant la croix blanche vaut alors $3 \times x$ m^2 et $4 \times x$ m^2. L'aire de la croix blanche est la somme des aires des rectangles la formant auquel on enlève l'aire du carré central (compté deux fois, dans chacun des deux rectangles) et donc l'aire de la croix blanche vaut :

$$3x + 4x - x^2$$

Ainsi on obtient :

$$7x - x^2 = 6 \Longleftrightarrow 0 = x^2 - 7x + 6$$

On a déjà résolu cette équation lors de la question précédente, elle admet deux solutions 1 et 6. Cependant il est impossible d'avoir $x = 6$ puisque le drapeau est de taille 4×3 donc le problème admet une unique solution qui est $x = 1$ m.
Ainsi la largeur de la croix blanche vaut 1 m.



Exercice 3. ⋆⋆⋆

On considère l'équation (E_m) d'inconnue x ci dessous :

$$(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \qquad (\mathrm{E}_m)$$

1. Résoudre l'équation (E_m) dans le cas où elle n'est pas une équation du second degré.
   L'équation (E_m) n'est pas une équation du second degré si et seulement si $m-1=0 \iff m=1$.
   Dans ce cas on résout (E_1) i.e. $-2x+4=0 \iff -2x=-4 \iff x=2$.
   L'unique solution de (E_1) est donc $x=2$.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E_m) en fonction des valeurs de m.
   Calculons le discriminant de l'équation (E_m) dans le cas où $m \neq 1$:

$$\Delta = b^2-4ac = (-2m)^2-4\times(m-1)\times(m+3) = 4m^2-4(m^2+3m-m-3) = 4m^2-4(m^2+2m-3) = 4m^2-4m^2-8m+12$$

   Au final

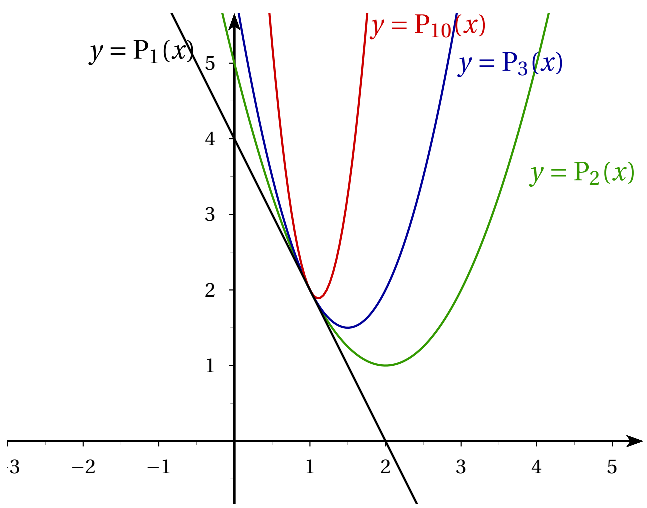
$$\Delta = -8m+12$$

   L'équation (E_m) admet exactement une solution si et seulement si $m=1$ ou $\Delta=0 \iff -8m+12=0 \iff -8m = -12 \iff m = \frac{12}{8} = \frac{4}{3}$

   De plus $\Delta > 0 \iff -8m+12>0 \iff -8m > -12 \iff m < \frac{4}{3}$.

   Conclusion :
   - L'équation (E_m) admet exactement deux solutions si et seulement si $m < \frac{4}{3}$ et $m \neq 1$
   - L'équation (E_m) admet exactement une solution si et seulement si $m = \frac{4}{3}$ ou $m=1$.
   - L'équation (E_m) n'admet aucune solution si et seulement si $m > \frac{4}{3}$.

3. Soit $\mathrm{P}_m(x) = (m-1)x^2-2mx+m+3$, montrer que quelque soit la valeur de m, toutes les courbes représentant P_m passent par un même point.
   Afin de conjecturer la réponse, on a représenté les courbes des fonctions P_1, P_2, P_3 et P_{10} :



   Conjecture : Très clairement il semble que ces quatre courbes passent par le point A(1;2).
   Prouvons le, pour cela montrons que $\mathrm{P}_m(1) = 2$ quelque soit la valeur de m :

$$\mathrm{P}_m(1) = (m-1)\times 1^2 - 2m\times 1 + m + 3 = (m-1) - 2m + m + 3 = m - 1 - m + 3 = 2$$

   On vient de démontrer que quelque soit la valeur du réel m, les courbes d'équations $y = \mathrm{P}_m(x)$ passent par le point A(1;2).

Exercice 4. ★★★★

On dispose d'une ficelle de 1 mètre que l'on coupe en deux morceaux, pas forcément égaux. Avec un des morceaux, on forme un carré, et avec l'autre, on forme un rectangle dont la longueur est le double de la largeur.

Comment couper la ficelle de sorte que la somme des aires du carré et du rectangle soit minimale ?

Notons x la longueur du morceau de ficelle permettant de former le carré. L'autre morceau de ficelle a alors pour longueur $1-x$.

Le côté du carré mesure $\frac{x}{4}$ mètre et donc l'aire du carré vaut :

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$$

En ce qui concerne le rectangle, son périmètre vaut $1-x$ mais aussi $2\mathrm{L}+2\ell$ où L est la longueur du rectangle et ℓ la largeur du rectangle. Il se trouve que la longueur L est le double de la largeur ℓ c'est-à-dire $\mathrm{L}=2\ell$; le périmètre du rectangle vaut donc $2\times 2\ell + 2\ell = 6\ell$, ainsi, en fonction de x, la largeur vaut :

$$6\ell = 1-x \Longleftrightarrow \ell = \frac{1-x}{6}$$

et la longueur du rectangle, en fonction de x, vaut :

$$\mathrm{L} = 2\ell = 2\times\frac{1-x}{6} = \frac{1-x}{3}$$

L'aire du rectangle, en fonction de x vaut donc :

$$\frac{1-x}{3}\times\frac{1-x}{6} = \frac{(1-x)^2}{18}$$

La somme des aires du carré et du rectangle vaut alors :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(1-x)^2}{18} = \frac{18x^2+16(1-x)^2}{288} = \frac{18x^2+16(1-2x+x^2)}{288} = \frac{18x^2+16-32x+16x^2}{288} = \frac{34x^2-32x+16}{288} = \frac{17x^2-16x+8}{144}$$

On cherche à déterminer pour quelle valeur de x le trinôme $\frac{17x^2-16x+8}{144}$ atteint son minimum. Cette valeur est l'abscisse du sommet c'est-à-dire :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{-16}{144}}{2\times\frac{17}{144}} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

Il faut couper un morceau de longueur $\frac{8}{17}$ pour former le carré et dans ce cas la somme des aires du carré et du rectangle est minimale, c'est-à-dire que n'importe quel autre découpe donne une somme supérieure à celle provenant de cette découpe.