∾ DEVOIR SURVEILLÉ 6 ∾
DÉRIVATION ET VECTEUR

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

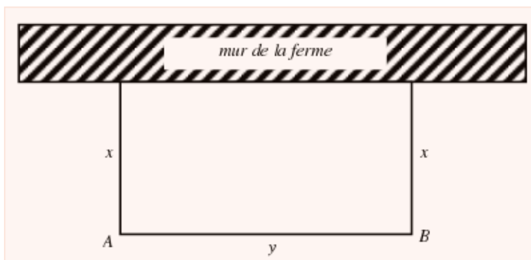
$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer le tableau de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. En utilisant le tableau de variation de f, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que nous noterons α, dans l'intervalle $[2;3]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 2.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les points A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?



La figure ci-dessus représente le poulailler accolée à la ferme *en vue de dessus*.

On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $\ell(x)$ du grillage est
$$\ell(x) = 2x + \frac{392}{x}$$
3. Déterminer $\ell'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de ℓ.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale ; donner ses dimensions.

Exercice 3.

Dans un repère orthonormé, on considère deux points A$(2;2)$ et B$(5;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. On considère le point I$(3,5;2,5)$ et le vecteur $\vec{u}(1;-3)$
   (a) Montrer que I est le milieu de [AB].
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d dirigée par $\vec{u}$ passant par I.
   (c) Déterminer les coordonnées du point D d'intersection entre la droite d et l'axe des abscisses.
   (d) Montrer que AD = DB.
   (e) Que représente d pour le segment [AB] ?

D. Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com