∾ Devoir Surveillé 2 ∾
Suite

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements.

Exercice 1. (5 points)

Indiquer sans justification la bonne réponse pour chaque question :

1. Si $u_n = n^2 + n - 1$ alors $u_{n+1} =$

   (a) $n^2 + n$ (b) $n^2 + 3n$ (c) $n^2 + 3n + 1$

2. On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ alors :

   (a) La suite u est croissante et admet pour limite 1 ;
   (b) La suite u est décroissante et admet pour limite 1 ;
   (c) La suite u admet pour limite $+\infty$.

3. Alice écrit la suite de nombres suivantes :

   $$5 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 11 \quad ; \quad 15 \quad ; \quad 20 \quad ; \quad 26 \quad ; \quad 33 \quad ; \quad \dots$$

   Parmi les suites suivantes laquelle **ne permet pas** de retrouver la suite de nombre écrites par Alice :

   (a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n - 1 \end{cases}$

4. On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :

   $$u_n = \sqrt{n} + n$$

   Le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1000$ est :

   (a) 91 ; (b) 968 ; (c) 969 ; (d) 970.

5. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$ alors l'algorithme suivant :

   Algorithme 1 :

   Données: u est réel, n un entier et $\mathrm{A} > 0$
   $u := 8$ et $n := 0$
   Tant que ($u > -\mathrm{A}$) **Faire**
       $u := u - 7$
       $n := n + 1$
   Fin Tant que
   Afficher n

   (a) permet d'afficher les termes de la suite u ;
   (b) permet d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n \leq -\mathrm{A}$;
   (c) permet d'afficher le plus grand entier n tel que $u_n > -\mathrm{A}$;
   (d) ne sert à rien.

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 10n + 16$$

Montrer que la suite u est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

Exercice 3. (8 points)

On trouve dans les écrits anciens, chez Héron d'Alexandrie, un procédé permettant d'extraire la racine carrée d'un nombre :

« Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a ; et prendre la moyenne entre a et $\frac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent »

On considère alors l'algorithme suivant :

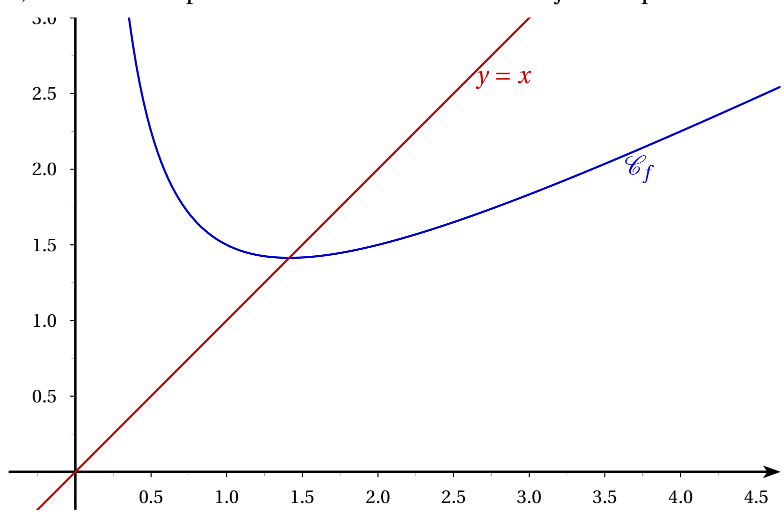
Algorithme 2 :

Données: a est un nombre réel et $A > 0$
Entrer A et Entrer a
Pour i allant de 1 à 3 **Faire**
  $a := \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$
  Afficher a
Fin Pour

1. Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $a = 4$ et $A = 2$?
2. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

   (a) Donner u_1 et u_2.
   (b) Donner une fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$.
   (c) Sur le graphique suivant, nous avons représenté la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$:



   Placer sur l'axe des abscisses, **en utilisant** $\mathscr{C}_f$ **et la droite d'équation** $y = x$, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

   (d) En se servant du graphique précédent, conjecturer le sens de variation de la suite u ainsi que la limite ℓ de la suite u.

3. On souhaite résoudre l'équation (E) : $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x$
   (a) Résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$.
   (b) Montrer que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$.
   (c) Que peut-on penser de la valeur exacte de la limite ℓ de la suite u ?

Exercice 4. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 1$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.