∽ DEVOIR MAISON 2 ∾
SUITES ET SECOND DEGRÉ

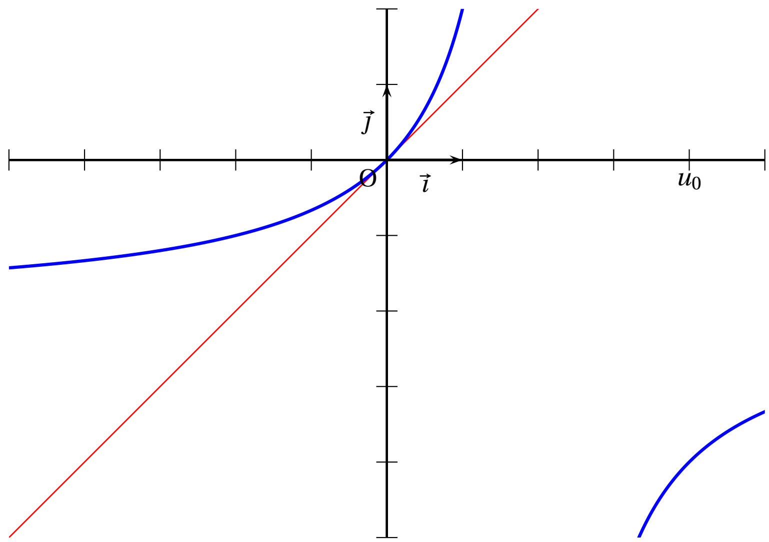
Vous traiterez au moins l'exercice 1. **A rendre le 08/10/14**

Exercice 1. ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2-u_n} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. **Représentation graphique** :
   (a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2, u_3 et u_4 en laissant apparent les traits de construction.



   (c) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \dfrac{-4}{2n-1}$
   (a) Calculer w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4. Que constate-t-on ?
   On admet que les suites u et w sont identiques.
   (b) Démontrer que :
   $$w_{n+1} - w_n = \frac{8}{(2n+1)(2n-1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
   (c) En déduire que w est croissante à partir du rang 1.
4. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est un réel et n un entier.
$n = 1$ et $u := -4$
Tant que $(u < \mathrm{A})$ **Faire**
  $u := \dfrac{2 \times u}{2-u}$
  $n := n+1$
Fin Tant que
Afficher n

   (a) Programme cet algorithme (sur algobox ou sur python ou sur votre calculatrice) et précisez ce qu'affiche l'algorithme si A = −0.1 puis si A = −0.01.
   (b) Que fait cet algorithme ?

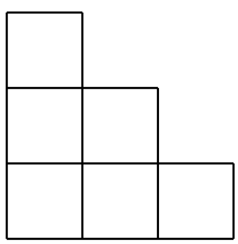
Exercice 2. ⋆⋆⋆

1. On pose $a = 0.99999\ldots$ (il y a une infinité de 9 et on le note $a = 0.\underline{9}$).
   (a) Montrer que $10a = 9 + a$
   (b) En déduire la valeur de a. *Incroyable non ? ! Et pourtant vrai, l'infini fait des miracles !*
2. On pose $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$ (il y a une infinité de racines imbriquées).
   (a) Montrer que $\Phi^2 = 1 + \Phi$.
   (b) En déduire la valeur de Φ. *On appelle Φ le nombre d'or*
   (c) Montrer que $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$.
   (d) En déduire que $\Phi = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\Phi}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\Phi}}} = \ldots$

   Cette écriture s'appelle le développement en fractions continues de Φ

Exercice 3. ⋆⋆⋆⋆

On positionne 2016 carrés de chocolat comme sur le dessin ci-dessous



— 1 carré sur la première ligne
— 2 carrés sur la deuxième ligne, etc.

En détaillant le raisonnement, calculer le nombre de carrés de chocolat sur la dernière ligne.