∽ DS ∽
Loi Normale et Matrices (1h)

Exercice 1 : **(10 points)**

Partie A

1. On repète 50 fois l'expérience aléatoire « choisir un composant » de manière identique et indépendante. L'expérience est :
   - ⇝ soit un succès (la durée de vie est supérieure à 1 000h) de probabilité 0.67
   - ⇝ soit un échec (dans tous les autres cas)

   La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0.67$
2. A la calculatrice, on trouve $p(X = 42) \simeq 0.004$.
3. Sur la ligne 6 du tableau, on lit $p(X \leq 42) \simeq 0{,}997\,973\,63$.
   Donc $p(X > 42) \simeq 1 - P(X \leq 42) \simeq 0.0020$

Partie B

1. On peut approcher « une loi binomiale de paramètres n et p par un loi normale de paramètres μ et σ » où $\mu = E(X) = np = 50 \times 0.67 = 33.5$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{33.5 \times (1 - 0.67)} \simeq 3.3$
2. Directement à la calculatrice, on trouve $P(27 \leq Y \leq 40) \simeq 0.951$.
3. Avec un dessin et la calculatrice, on trouve $P(Y \leq 35) = 0.5 + P(33.5 \leq X \leq 35) \simeq 0.675$.
4. Avec un dessin et la calculatrice, on trouve $P(Y > 42) = 0.5 - P(33.5 \leq X \leq 42) \simeq 0.005$.
5. Directement à la calculatrice, on trouve $a \simeq 38.928$
6. A l'aide d'un dessin on peut voir que $p(Y \geq b) = 0{,}95 \iff p(Y < b) = 0.05$.
   La calculatrice donne alors $b \simeq 28.072$
7. A l'aide d'un dessin, on trouve que
   $p(33{,}5 - c \leq Y \leq 33{,}5 + c) = 0{,}95.$ implique $p(Y \leq 33.5 - c) = \dfrac{0.05}{2} = 0.025.$
   A la calculatrice, on trouve alors que $33.5 - c \simeq 27.032$ d'où $c \simeq 6.5$

Exercice 2 : **(3 points)**

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \\ -9 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 10 \\ -2 & 6 & 5 \\ -11 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$A + C$ est impossible à faire, tout comme $A \times C$

$$C \times A = \begin{pmatrix} 5 & -22 & 9 \\ -5 & 14 & -3 \end{pmatrix}$$

où $5 = 5 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times (-3)$ et $-22 = 5 \times (-4) + (-1) \times 2 + 0 \times 0$

Exercice 3 : **(2 points)**

Le système $\begin{cases} x+y-z=5 \\ -y+2z=25 \\ -2x+y+z=15 \end{cases}$ est équivalent à l'équation AX = B avec

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Or

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \iff \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B} \iff \mathrm{I}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B} \iff \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}$$

A la calculatrice, on trouve $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ donc $x=10$, $y=15$ et $z=20$ sont solutions du système.

Exercice 4 : **(5 points)**

On appelle s la quantité de sable, g la quantité de gravier et c la quantité de ciment commandées.

On sait que $\begin{cases} 2.1s & + & 2g & + & 5.4c & = & 58.1€ \\ 2s & + & 2g & + & 5.3c & = & 56.5€ \\ 1.9s & + & 2g & + & 5.1c & = & 54.4€ \end{cases}$

Or ce système est équivalent à l'équation AX = B avec

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2.1 & 2 & 5.4 \\ 2 & 2 & 5.3 \\ 1.9 & 2 & 5.1 \end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix} s \\ g \\ c \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 58.1 \\ 56.5 \\ 54.4 \end{pmatrix}$$

Or

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \iff \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B} \iff \mathrm{I}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B} \iff \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}$$

A la calculatrice, on trouve $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $s=11$, $g=4$ et $c=5$ sont solutions du système.

J'avais donc commandé 11 kg de sable, 4 kg de gravier et 5 kg de ciment.