Exercices
Lois Continues 1

Exercice 1 : X suit la loi uniforme sur $[-1;4]$. Quelle est la probabilité que

1. $X \in [-0.5;0.5]$?
2. $X \in [1;3.5]$?
3. $X \in [-0.5;0.5] \cup [1;3.5]$?

Exercice 2 : Un appareil de mesure évalue l'épaisseur en centimètres de pièces mécaniques. Cette épaisseur est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[4;20]$.
Les pièces sont acceptées si leur épaisseur dépasse 12cm.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce soit acceptée.
2. Une pièce a une épaisseur supérieure à 10cm. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?
3. Déterminer $E(X)$ puis $\sigma(X)$ et interpréter vos résultats.
4. Déterminer $P\big(E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X)\big)$

Exercice 3 : M. Dupont et M. Dupond se donnent rendez-vous entre 12h et 13h. Proche du lieu fixé, M. Dupond sera assurément là à 12h30. Quant à M. Dupont, son arrivée dépend de la circulation : il arrivera entre 12h et 13h, de manière totalement aléatoire.

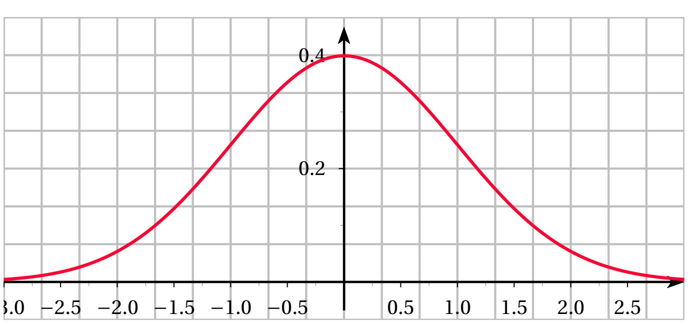
1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de M. Dupont ?
2. Calculer alors la probabilité que M. Dupont arrive avant M. Dupond ?
3. Calculer la probabilité que M. Dupond attende M. Dupont plus de 10 min ?

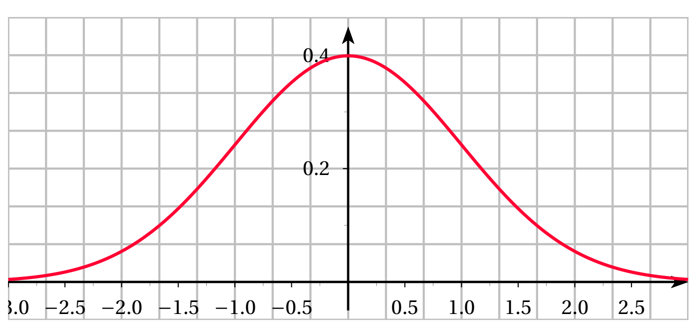
Exercice 4 : Hugo arrive à l'arrêt de bus sans avoir consulté les horaires. Sur cette ligne, un bus part toutes les huit minutes. On note X la variable aléatoire donnant en minutes le temps d'attente d'Hugo jusqu'au départ du bus.

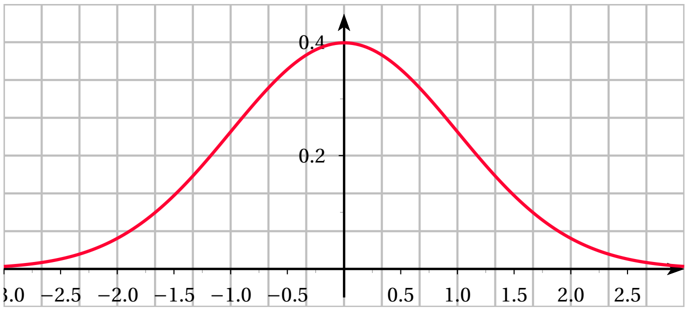
1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité qu'Hugo attende :
   - **a.** moins de deux minutes
   - **b.** entre trois et six minutes
   - **c.** plus de cinq minutes
   - **d.** exactement deux minutes.

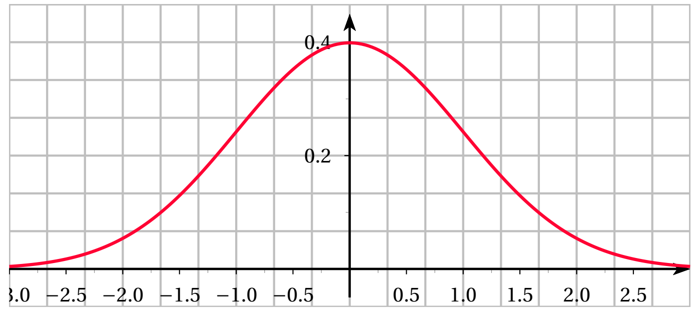
Exercice 5 : On a représenté ci-dessous la fonction f, densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant cette loi.
   - **a.** A l'aide du graphique, colorier le domaine ayant pour aire $P(0 < X < 1)$
   - **b.** Déterminer $P(0 < X < 1)$ à la calculatrice
2. Utiliser alors le coloriage et la réponse précédentes pour déterminer $P(X < 1)$, $P(-1 < X < 1)$, $P(X < -1)$ et $P(X > 1)$.









Exercice 6 : On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.
Dans cet exercice, on donnera les probabilités arrondies à 10^{-4} près.

1. **a.** A l'aide d'une calculatrice, déterminer la probabilité $P(X < 0.73)$.
   b. A partir de la valeur calculée précédemment, et sans calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X > 0.73) \qquad P(X \leq -0.73) \qquad P(X \leq -0.73) \qquad P(-0.73 < X < 0.73)$$

2. **a.** Déterminer à l'aide de la calculatrice les probabilités $P(X \leq -0.55)$ et $P(X \leq 0.77)$.
   b. En déduire la probabilité de l'événement $-0.55 \leq X \leq 0.77$.
3. Soit t un réel strictement positif. Exprimer $P(X > -t)$ puis $P(X < -t)$ en fonction de $P(X \leq t)$.

Exercice 7 : La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(20;5)$. A l'aide de la calculatrice déterminer

$$P(12 < X < 28) \qquad P(15 < X < 25) \qquad P(X < 28) \qquad P(X \geq 28) \qquad P(X \geq 12)$$

Exercice 8 : Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

1. Calculer a tel que $P(X \leq a) = 0.2$
2. Calculer b tel que $P(X \geq b) = 0.2$
3. Calculer c tel que $P(-c \leq X \leq c) = 0.2$

Exercice 9 : On mesure la taille en centimètres de 2 500 hommes. La loi de la variable aléatoire T correspondante est une loi normale d'espérance 169 cm et d'écart-type 5.6 cm.

1. Quel est le pourcentage d'homme dont la taille est comprise entre 155 et 175 cm ?
2. Quel est le pourcentage d'homme dont la taille est inférieure à 155 cm ?
3. Quel est l'intervalle centré sur l'espérance de T qui contient 60% de la population en question ?

Exercice 10 : Une machine fabrique en grande série des pièces d'acier. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production hebdomadaire, associe sa longueur en cm. On admet que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 0.0004$)

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(9.972 < X < 10.03) \qquad P(X < 10.03) \qquad P(X > 9.972)$$

2. Déterminer le nombre réel positif a tel que $P(10 - a \leq X \leq 10 + a) = 0.8$

Exercice 11 : Lorsqu'un avion atterit, il est aussitôt pris en charge par les services du contrôle technique et il fait l'objet d'un entretien dont la durée T, exprimée en minutes, est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 50$ et $\sigma = 5$.
A la fin de cet entretien, l'avion est prêt à décoller.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Un avion atterit. Calculer la probabilité pour que le délai d'attente soit supérieur à 55 minutes.
2. Calculer la probabilité pour qu'un avion soit prêt à décoller entre 40 et 60 minutes après son atterrissage.
3. Trouver le nombre t tel que la probabilité d'avoir un délai d'attente compris entre $50 - t$ et $50 + t$ soit au moins égale à 0.99.

Exercice 12 : Tous les jours, Hugo joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D en secondes qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[20;120]$.
   - **a.** Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   - **b.** Calculer l'espérance de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J en minutes d'une partie est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 120$ et $\sigma = 20$.
   - **a.** Déterminer l'espérance et l'écart-type de J
   - **b.** Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0.001 près.

Exercice 13 : Une usine fabrique en grande quantité des rondelles d'acier. Leur diamètre est exprimé en millimètres.
Dans cet exercice, sauf indication contraire, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2}

PARTIE A : **Loi normale**

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle $[89,6;90,4]$.

1. On note X_1 la variable aléatoire qui à chaque rondelle prélevée au hasard associe son diamètre.
   On suppose que la variable X_1 suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et $\sigma = 0.12$.
   Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles. Il est envisagé de modifier le réglagle des machines produisant les rondelles.
   On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la future production associe son diamètre.
   On suppose que D suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et d'écart-type σ.
   Déterminer σ pour que la probabilité que le diamètre d'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme soit égal à environ 0.997.

PARTIE B :

...

Exercice 14 : Approx binomiale par normale (Nathan)