∾ Cours ∾
Calcul vectoriel : Barycentres

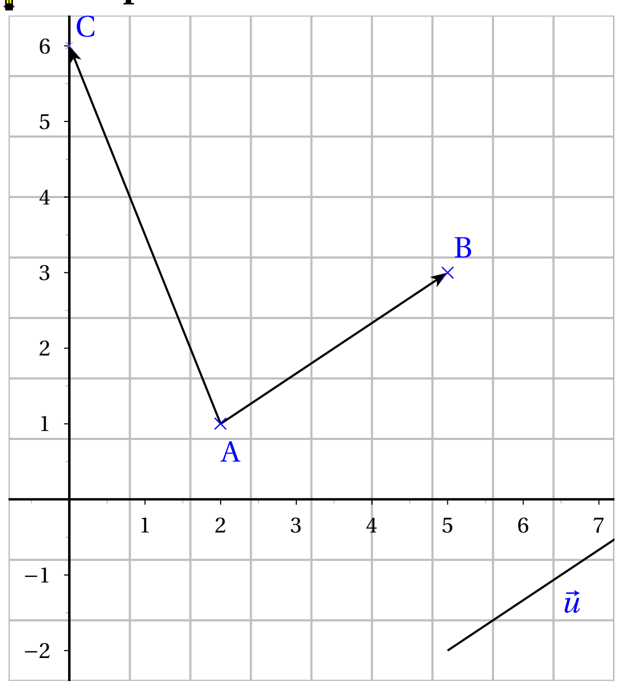
I) Les vecteurs

I.1. Vocabulaire

Un vecteur est un objet géométrique représentant un trajet en ligne droite. Autrement dit, il est caractérisé par :

- ⇝ Une **direction** (celle de la ligne droite)
- ⇝ Un **sens** (celui où l'on parcourt la droite, ce qui revient à ne s'intéresser qu'à une demi-droite)
- ⇝ Une **longueur** (celle du trajet, ce qui revient à ne s'intéresser qu'à un segment orienté)

Exemple :



1. Quels vecteurs sur la figure sont les mêmes ? Pourquoi ?
2. Tracer un vecteur opposé à $\overrightarrow{AC}$. Proposer deux notations.
3. Tracer un trajet correspondant à cumuler celui de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
   Proposer une notation
4. Tracer un trajet correspondant à cumuler celui de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
   Que constatez-vous ?
5. Placer M tel que

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Remarques :

- ⇝ On les représente par des flèches et on les note en mettant une flèche de gauche à droite au dessus de leur nom.
  $\overrightarrow{AB}$ est donc le trajet allant de A vers B en ligne droite.
  $\overrightarrow{BA}$ est donc le trajet allant de B vers A en ligne droite.
- ⇝ Le trajet consistant à rester sur place est symbolisé par un vecteur nul et est noté $\vec{0}$.
- ⇝ L'**opposé** d'un vecteur est le vecteur décrivant le même trajet mais dans le sens oppposé. Ainsi

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

- ⇝ Les vecteurs n'ont pas de position fixe dans le plan ou l'espace (peu importe leur point de départ, on ne s'intéresse qu'au trajet qu'ils représentent).
- ⇝ On peut les ajouter, les soustraire, les multiplier par un réel : concrètement, cela revient à cumuler les trajets ou les retrancher ou encore les allonger.

Théorème 1. (Relation de Chasles)

Soient A, B et C trois points du plan ou de l'espace. On a

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

I.2. Décomposition d'un vecteur dans une base

Travail de l'élève 1 : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre O, tel que AB = 3, AD = 6 et AE = 4.

On appelle I le centre du rectangle ABCD et J le milieu de l'arête [EH].

1. Faire un schéma de la situation
2. **a.** Placer le point K tel que :
$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HJ}$$
   b. Démontrer que
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$
3. **a.** Déterminer les réels x et y tels que
$$\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$$
   On dit que l'on a **décomposé le vecteur** $\overrightarrow{BD}$ **en fonction des vecteurs** $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   b. En utilisant la question 2, décomposer le vecteur
   - $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HE}$
   - $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$

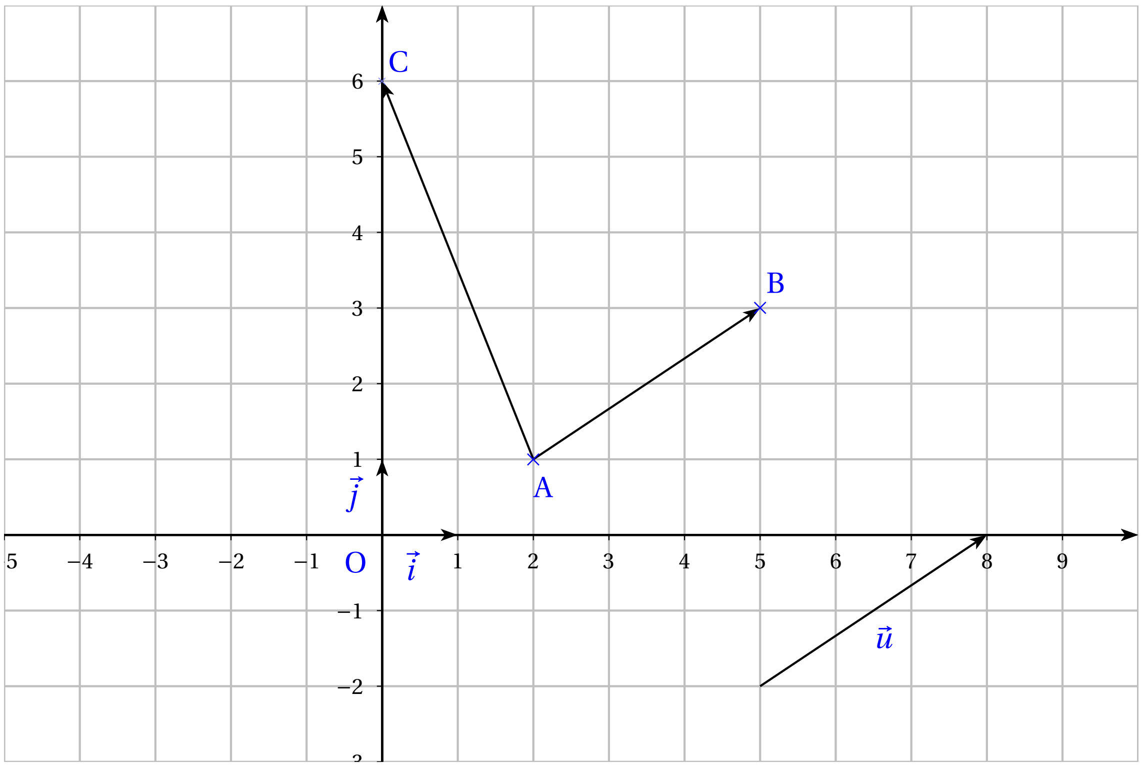
   c. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   d. Peut-on décomposer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$?
4. **a.** Placer les points M, N et P tels que
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$
   b. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

Exercice(s) du livre : Delagrave : exos 3 à 6 p 132

II) Barycentres

II.1. Milieu

Travail de l'élève 2 :



1. Lire les coordonnées des milieux des segments [AB], [AC] et [BC].
2. Conjecturer une formule pour calculer les coordonnées du milieu d'un segment [AB] en fonction des coordonnées des points A et B

Propriété 1.

Soient $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points de l'espace.
Alors les coordonnées du milieu I de [AB] sont :

$$I\left(\frac{x_B + x_A}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_A}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_A}{2}\right)$$

Dans le plan, on a $I(x_I; y_I)$

Remarque : Le milieu d'un segment est en fait son point d'équilibre (si le poids du segment est équiréparti.)

II.2. Barycentres de deux points pondérés

Travail de l'élève 3 : act 1 p 126

Définition 1.

On considère deux points A et B du plan ou de l'espace, affectés de « poids » a et b (a et b sont des nombres réels avec $a+b\neq 0$)
On appelle **barycentre de deux points pondérés** (A, a) et (B, b) l'unique point G tel que

$$a\overrightarrow{\mathrm{GA}}+b\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}$$

Remarque : Le barycentre de deux points pondérés est en fait le point d'équilibre du segment.
Si $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$, G appartient donc à la droite (AB). De plus, si $a=b$ alors G est le milieu du segment [AB]

Propriété 2.

Pour tout point M on a $a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(a+b)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$
En particulier on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Théorème 2.

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\ y_\mathrm{A}\,;\ z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\ y_\mathrm{B}\,;\ z_\mathrm{B})$ deux points de l'espace.
Alors le barycentre G des points (A, a) et (B, b) (avec $(a+b\neq 0)$ a pour coordonnées :

$$\mathrm{G}\left(\frac{ax_\mathrm{A}+bx_\mathrm{B}}{2}\,;\ \frac{ay_\mathrm{A}+by_\mathrm{B}}{2}\,;\ \frac{az_\mathrm{A}+bz_\mathrm{B}}{2}\right)$$

Dans le plan, on a $\mathrm{G}(x_\mathrm{G}; y_\mathrm{G})$

Exercice(s) du livre : Delagrave : 7 à 10 p 132
Nathan : 11 + (14 ?) p 129

II.3. Barycentres de trois points pondérés

Travail de l'élève 4 : act 2 p 126

Définition 2.

On considère trois points A et B du plan ou de l'espace, affectés de « poids » a, b et c (a, b sont des nombres réels avec $a+b+c \neq 0$)
On appelle barycentre de deux points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) l'unique point G tel que

$$a\overrightarrow{\mathrm{GA}} + b\overrightarrow{\mathrm{GB}} + c\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

Remarque : Le barycentre de trois points pondérés est en fait le point d'équilibre du triangle.
Ainsi, si $a = b = c$ alors G est le centre de gravité du triangle ABC

Propriété 3.

Pour tout point M on a $a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$
En particulier on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Théorème 3.

Si H est le barycentre de trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) (avec $a+b+c \neq 0$)
Et si G est le barycentre de deux points (A, a) et (B, b) (avec $a+b \neq 0$)
Alors H est le barycentre des points $(\mathrm{G}, a+b)$, (C, c)

Théorème 4.

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\ y_\mathrm{A}\,;\ z_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\ y_\mathrm{B}\,;\ z_\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}(x_\mathrm{C}\,;\ y_\mathrm{C}\,;\ z_\mathrm{C})$ trois points de l'espace. Alors le barycentre G des points (A, a), (B, b) et (C, c) (avec $(a+b+c \neq 0)$ a pour coordonnées :

$$\mathrm{G}\left(\frac{ax_\mathrm{A}+bx_\mathrm{B}+cz_\mathrm{C}}{3}\,;\ \frac{ay_\mathrm{A}+by_\mathrm{B}+cz_\mathrm{C}}{3}\,;\ \frac{az_\mathrm{A}+bz_\mathrm{B}+cz_\mathrm{C}}{3}\right)$$

Dans le plan, on a $\mathrm{G}(x_\mathrm{G}; y_\mathrm{G})$

Exercice(s) du livre : Delagrave : 11 à 14 p 133 + TP1 p 130
Nathan : 12 + 13 + (15 ?) p 129