

EXERCICES

LOI BINOMIALE

 **Exercice 1** : Une entreprise fabrique une grande quantité de tubes.

Dans un lot de tubes, 3% des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$. Interpréter.
3. En déduire la probabilité que dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.
4. L'entreprise reçoit une amende si, lors d'un tel prélèvement pratiqué par un expert, il y a 3 tubes ou plus non conformes pour la longueur.
 - ↪ Calculer la probabilité que l'entreprise ne reçoive pas d'amende.
 - ↪ En déduire celle que l'entreprise reçoit une amende.

 **Exercice 2** : Un grossiste en fourniture de bureau vend un ruban adhésif.

La probabilité qu'un ruban adhésif jaunisse le papier est de 0,008.

Un client achète 500 rubans adhésifs. On assimilera le choix des ces 500 rubans à un tirage aléatoire avec remise.

On s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte dans ce lot le nombre de rubans qui jaunissent le papier.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces rubans jaunisse le papier ?

 **Exercice 3** : Un constructeur de composants électroniques fabrique des diodes.

La probabilité pour qu'une diode soit défectueuse est 5×10^{-3} . On prélève au hasard un lot de 10 diodes dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 diodes.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de diodes défectueuses dans ce lot.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres
2. Calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir dans ce lot de 10 diodes :
 - a. exactement une diode défectueuse ;
 - b. exactement deux diodes défectueuses ;
 - c. au moins 2 diodes défectueuses ;
 - d. au plus 2 diodes défectueuses.
3. Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter.
4. Calculer l'écart-type de X .

 **Exercice 4** : Une usine fabrique en grande quantité des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

La probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans un stock important ait un diamètre défectueux est 0,02.

On prélève au hasard 20 rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 rondelles.

On note X la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de rondelles ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au plus trois rondelles aient un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3} .
4. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au moins huit rondelles aient un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3} .
5. Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter.
6. Calculer l'écart-type de X .

 **Exercice 5** : Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7.

1. Quelle est la probabilité que sur 5 tirs il touche au moins une fois sa cible ?

Bien rédiger la réponse en justifiant le calcul !

2. Le tireur repère tous les jours de l'année une séance de 5 tirs.
Combien de fois peut-il espérer toucher en moyenne sa cible par jour ?

 **Exercice 6** : Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses.

La probabilité qu'une ponceuse soit défectueuse est $p = 0,08$. On prélève au hasard 25 ponceuses dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 ponceuses.

On note X la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses défectueuses de ce prélèvement.

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 10^3 .

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement il y ait exactement 4 ponceuses défectueuses.
3. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au moins une ponceuse défectueuse.
4.
 - a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . Interpréter.
 - b. Calculer l'écart-type de X . Interpréter.
 - c. La réparation d'une ponceuse défectueuse coûte 30€. Quelle est, pour un lot de 25 ponceuses, le montant des réparations à prévoir ? Est-ce risqué ?

Exercice 7 : Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, quatre réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte. La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).

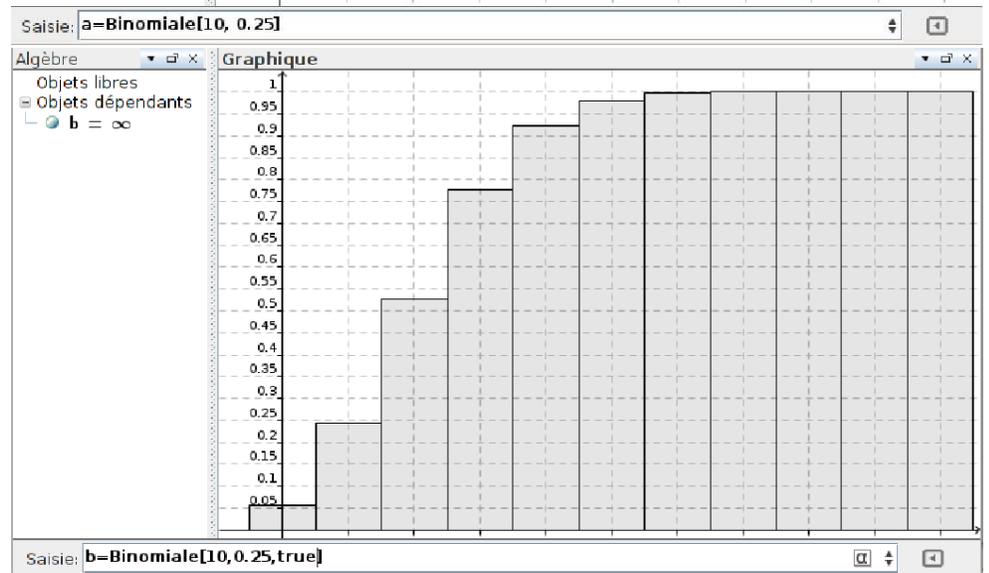
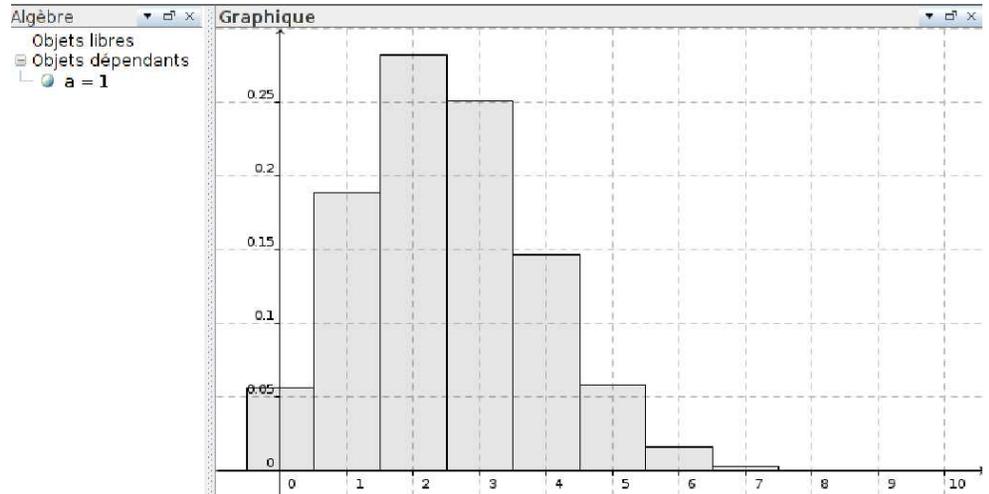
Une bonne réponse donne 1 point à Fabrice, une mauvaise ne lui donne rien.

On désigne par X la variable aléatoire comptant le point obtenus par Fabrice.

1. Justifier X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Dans géogébra, on donne l'histogramme et le graphique en escalier ci-contre. Lire sur ces graphiques :

- a. la probabilité que Fabrice obtienne la note maximale ?
- b. la probabilité qu'il obtienne au moins la moyenne ?
- c. la note la plus probable de Fabrice ?

3. Quelle note que Fabrice peut-il espérer obtenir en moyenne sur un grand nombre de QCMs qu'il aurait réalisés ainsi ?



Exercice 8 :

Affaire Castaneda contre Partida

Des arguments de type probabiliste peuvent être avancés et pris en compte dans les cours de justice. En novembre 1976, Rodrigo Partida, d'origine mexicaine, était condamné à huit ans de prison pour vol et tentative de viol dans un comté du sud du Texas. Il attaqua le jugement sous motif que la désignation des jurés dans l'Etat du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.

Attendu de la Cour Suprême des Etats-Unis (affaire Castaneda contre Partida)

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une distribution binomiale ...

Etant donnée que 79.1% de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement de 688. Le nombre observé est 339.

Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel, cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue ...

La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la distribution binomiale comme la racine carré de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209) ... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12.

En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines.

Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé révèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140} . »

Source : « *Prove it with Figures (Statistics for Social Science and Behaviour Sciences)* », Hans Zeisel et David Kaye; Springer (2006)

1. Définir la variable aléatoire X qui, dans cette situation, suit une loi binomiale.
Quels sont les paramètres de cette loi binomiale ?
2. A quel calcul correspond la valeur 688 ?
3. Effectuer le calcul de l'écart-type de X . A quoi correspond la « différence de 29 écarts-types » ?
4. A quel événement correspond la probabilité de 10^{-140} ? Faites le calcul à l'aide du logiciel Xcas. Etes-vous d'accord ?
5. Peut-on considérer que la consitution des jurys résultait du hasard ?
6. La cour d'appel a donc finalement donné raison à la défense Partida. Cependant, elle exclut une démonstration mathématique de discrimination raciale. N'allez pas croire qu'il y ait eu un complot !
Quel critique pouvez-vous faire sur la modélisation ?
A votre avis, qu'est-ce qui peut justifier une telle composition de jury ?